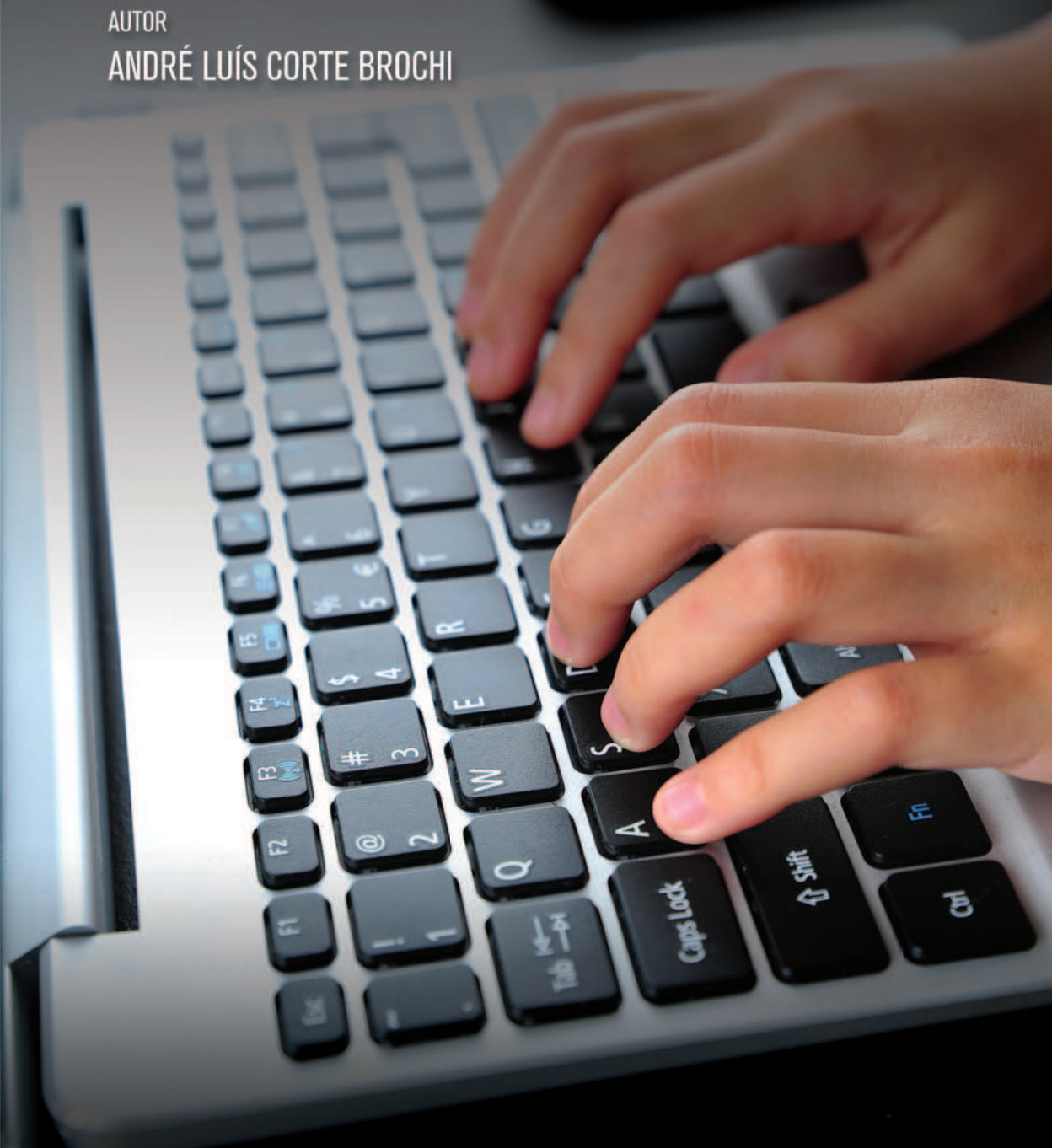


MATEMÁTICA APLICADA A COMPUTAÇÃO₅

AUTOR

ANDRÉ LUÍS CORTE BROCHI



MATEMÁTICA APLICADA A COMPUTAÇÃO

AUTOR

ANDRÉ LUÍS CORTE BROCHI

1ª EDIÇÃO

SESES

RIO DE JANEIRO 2016



Estácio

Conselho editorial REGIANE BURGER, ROBERTO PAES E PAOLA GIL DE ALMEIDA

Autor do original ANDRÉ LUÍS CORTE BROCHI

Projeto editorial ROBERTO PAES

Coordenação de produção PAOLA GIL DE ALMEIDA, PAULA R. DE A. MACHADO E ALINE
KARINA RABELLO

Projeto gráfico PAULO VITOR BASTOS

Diagramação BFS MEDIA

Revisão linguística BFS MEDIA

Revisão de conteúdo ROGERIO PINTO ESPINDOLA

Imagem de capa SHAHRIL KHMD | SHUTTERSTOCK.COM

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra pode ser reproduzida ou transmitida por quaisquer meios (eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia e gravação) ou arquivada em qualquer sistema ou banco de dados sem permissão escrita da Editora. Copyright SESES, 2016.

Diretoria de Ensino — Fábrica de Conhecimento
Rua do Bispo, 83, bloco F, Campus João Uchôa
Rio Comprido — Rio de Janeiro — RJ — CEP 20261-063

Sumário

Prefácio	7
1. Teoria dos conjuntos	9
1.1 Notação e propriedades de conjuntos	11
1.2 Tipos especiais de conjuntos e subconjuntos	12
1.3 Operações elementares em conjuntos	15
1.3.1 União	16
1.3.2 Intersecção	16
1.4 Diferença	17
1.4.1 Complementar	18
1.5 Aplicações das operações com conjuntos e princípio da inclusão e exclusão	19
1.6 Conjuntos numéricos	25
1.7 Intervalos numéricos	28
1.8 Valor absoluto de um número	30
2. Contagem	39
2.1 Princípio das casas de pombos	40
2.2 Princípio da multiplicação e princípio da adição	42
2.3 Permutação, arranjo e combinação.	45
3. Relações	61
3.1 Produto cartesiano e pares ordenados	63
3.2 Relações binárias. Propriedades e fechos	66
3.2.1 Propriedades das relações	70
3.3 Ordens parciais e relações de equivalência	76

4. Funções 85

4.1 Definição	87
4.2 Funções sobrejetoras, injetoras e bijetoras	93
4.3 Função inversa	97
4.4 Composição de funções	99
4.5 Funções do primeiro e do segundo grau e seus gráficos	100
4.6 Funções polinomiais	113

5. Cálculo proposicional 121

5.1 Raciocínio e lógica: linguagem natural e linguagem simbólica	123
5.2 Proposições simples e compostas	127
5.3 Tabelas-verdade e conectivos	130
5.3.1 Negação	133
5.3.2 Conjunção	134
5.3.3 Disjunção (ou Disjunção Inclusiva ou Soma Lógica)	135
5.3.4 Disjunção Exclusiva	136
5.3.5 Condicional	137
5.3.6 Bicondicional	138
5.3.7 Ordem de precedência dos conectivos	139
5.4 Tautologia, contradição e contingência.	140
5.5 Equivalências lógicas	142
5.6 Proposições associadas a um condicional: argumentos válidos e regras de inferência	143
5.6.1 Leis de equivalência	146
5.7 Álgebra de Boole aplicada à construção de tabelas-verdade	148

6. Cálculo de predicados e métodos de demonstração 157

6.1 Predicados, conjunto universo e conjunto verdade	158
6.2 Quantificadores	160
6.3 Métodos de demonstração	166

6.3.1 Prova direta	167
6.3.2 Demonstração por redução ao absurdo	169
6.3.3 Demonstração da forma condicional	172
6.3.4 Demonstração por indução	173

Prefácio

Prezados(as) alunos(as),

Sabemos que não são raros os questionamentos acerca da aplicabilidade ou utilidade prática do que se aprende em Matemática. Talvez pelo fato de que seus conteúdos, muitas vezes, são apresentados de forma extremamente teórica, como um conjunto de regras, teoremas e algoritmos que apenas devem ser seguidos, sem uma preocupação adequada com a construção de uma lógica, por parte do aluno, para que ele realmente compreenda o que está fazendo.

Tanto os teoremas, como os algoritmos e regras, que são apresentados no desenvolvimento da Matemática, têm importância fundamental, pois ajudam na interpretação e resolução de problemas de ordem prática. As tão temidas fórmulas matemáticas (pelo menos em sua maioria) traduzem um raciocínio lógico que, geralmente, não é difícil de desenvolver. A não compreensão de tais fórmulas e a dificuldade em lidar com a linguagem matemática é que tornam o trabalho um tanto traumático. Mas, se trabalhada de forma adequada, a Matemática torna-se extremamente útil em nossas vidas pessoal e profissional.

E a compreensão dessa linguagem própria da Matemática, que para muitos é um dos principais desafios a ser superado no aprendizado desta ciência, é fundamental para que se possa entender melhor os processos teóricos e práticos relativos ao desenvolvimento do raciocínio matemático. Você, certamente, chegará ao ponto em que “traduzirá” problemas, escritos na linguagem corrente, para a “linguagem” matemática. Essa transição da descrição do problema para sua representação utilizando símbolos matemáticos é, talvez, um dos procedimentos mais difíceis para a maioria dos estudantes. Mas, com este livro, procuramos desenvolver os conteúdos sempre acompanhados de muitos exemplos para que esse processo seja o menos “traumático” possível.

No primeiro capítulo, estudaremos os conceitos básicos referentes aos conjuntos: suas propriedades, operações, representações, características e aplicações.

No capítulo 2, serão abordados processos e técnicas de contagem, que são assuntos pertencentes à parte da Matemática denominada Análise Combinatória.

No terceiro capítulo, começamos o estudo das relações matemáticas (que também envolvem os conjuntos estudados no primeiro capítulo). Relacionar elementos de dois conjuntos é um procedimento útil na resolução de diversos problemas e, principalmente, constitui-se como base ao estudo das funções matemáticas, que é o assunto principal do capítulo 4. As funções matemáticas são de fundamental importância nas aplicações das mais diversas áreas do conhecimento. Elas que nos permitem detalhar como ocorrem as relações entre variáveis dos fenômenos que estudamos.

Bons estudos!

1

Teoria dos conjuntos

1. Teoria dos conjuntos

Iniciaremos nossos estudos com um conceito primitivo (e muito simples!) que é o de **conjuntos**. O desenvolvimento da Matemática passa, para não dizer que começa, com o surgimento da ideia de conjuntos. Nosso sistema de numeração, por exemplo, surgiu a partir da relação entre quantidades de conjuntos diferentes. Tudo leva a crer que, há milhares de anos, os pastores de ovelhas, para verificar se não estava faltando nenhum animal em seu rebanho, relacionavam cada ovelha com uma pedra. Dessa forma, relacionavam cada um dos elementos do conjunto de “ovelhas” com elementos do conjunto de “pedras”. A inclusão de uma nova ovelha no conjunto de ovelhas determinava que uma nova pedra fosse também incluída no conjunto de “pedras”

A partir desse tipo de relação, e após milhares de anos, surgiu o sistema de numeração indo-arábico, que utilizamos até os dias de atuais e que são a base de diversos assuntos que envolvem a matemática e o raciocínio lógico. Além disso, a teoria de conjuntos tem aplicações diretas em diversos assuntos relacionados à Matemática, como, por exemplo, no estudo de funções, na resolução de problemas lógicos e no cálculo de probabilidades.

Neste capítulo, iremos abordar assuntos de grande importância e que não apresentam alto grau de dificuldade de compreensão. São, em geral, conceitos básicos e de fácil entendimento. Mas, nem por isso, são menos importantes que outros. Aliás, acreditamos que seja o contrário: pela sua importância na compreensão da linguagem matemática, pela utilização em diversos assuntos da própria matemática e pela variedade de aplicações diretas que tem na resolução de problemas, os assuntos aqui tratados serão de fundamental importância para o bom entendimento dos assuntos abordados nas demais unidades.



OBJETIVOS

- Utilizar e estar familiarizado com as operações elementares da teoria de conjuntos;
- Resolver problemas lógicos com a utilização de diagramas;
- Reconhecer as relações de pertinência e contingência dos conjuntos;
- Identificar diferentes conjuntos numéricos e suas propriedades;
- Compreender e utilizar o conceito de valor absoluto de um número.

1.1 Notação e propriedades de conjuntos

O conceito de **conjunto**, um dos principais e mais utilizados conceitos da Matemática, é primitivo e tem sentido de coleção ou totalidade dos elementos. Podemos citar, por exemplo, o conjunto de disciplinas obrigatórias de um curso de graduação. Cada disciplina é chamada de **elemento** desse conjunto.

Para representar matematicamente os conjuntos, utilizamos letras maiúsculas do nosso alfabeto: A, B, C, Já seus elementos são representados por letras minúsculas: a, b, c, Entre os **elementos** e os **conjuntos** há uma relação de pertinência. Se a é um elemento do conjunto A, então dizemos que “o elemento a pertence ao conjunto A”, ou simplesmente, “a pertence a A”. Na simbologia matemática, escrevemos:

$$a \in A.$$

No caso de um elemento, por exemplo, b não pertencente a esse conjunto A, escrevemos:

$$a \notin A.$$

A representação de um conjunto pode ocorrer de três formas diferentes, como veremos a seguir:

I. Nomeando seus elementos entre chaves e separados por vírgulas. Como exemplo, considere o conjunto S dos dias da semana. Podemos representá-lo na forma:

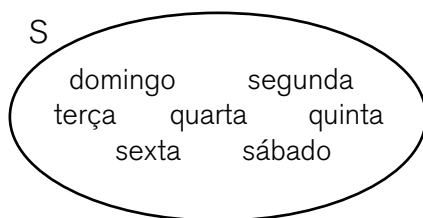
$$S = \{\text{domingo, segunda, terça, quarta, quinta, sexta, sábado}\}.$$

II. Descrevendo uma propriedade que caracteriza seus elementos. Nesse caso, o conjunto S acima pode ser indicado na forma:

$$S = \{x \mid x \text{ é um dia da semana}\}.$$

A “leitura” que podemos fazer da linha acima é “o conjunto S é formado por todo elemento x tal que x é um dia da semana”.

III. Usando o **diagrama de Venn**, que é uma forma gráfica de representação de conjuntos e bastante útil na resolução de problemas e representações de operações entre conjuntos. O conjunto S dos dias da semana pode, então, ser representado por diagrama como a seguir:



A indicação do número de elementos de um conjunto S pode ser feita utilizando-se a notação $n(S)$. No caso do conjunto S dos dias da semana que acabamos de ver, temos $n(S) = 5$.

1.2 Tipos especiais de conjuntos e subconjuntos

Criada pelo matemático russo Georg Cantor (1845–1918), a “Teoria dos Conjuntos” serve de base para fundamentar diversos conteúdos matemáticos. Vários problemas lógicos podem ser modelados através dos conceitos, representações e operações de conjuntos. Temos o hábito de raciocinar através da utilização da ideia de conjuntos.

Uma linha de produção industrial, por exemplo, é composta por diversos setores que desempenham funções diferentes, mas que pertencem ao mesmo conjunto. Você mesmo pode ser considerado um elemento do conjunto de pessoas que habitam a cidade em que você reside. Os outros habitantes (elementos) são pessoas que possuem pelo menos uma característica comum a você (residem na mesma cidade), mas diferem-se por não compartilharem exatamente as mesmas características. Há quem tenha o mesmo sexo, a mesma idade ou o mesmo emprego que você, mas nem todas as características são coincidentes.

Quando você deseja realizar uma pesquisa na internet através de um site de busca, você digita uma palavra-chave relacionada ao assunto. Por exemplo, considere uma pesquisa sobre “teoria dos conjuntos”. O site apresentará, dentre o universo de sites cadastrados, aqueles que têm relação com a palavra-chave digitada. Os sites apresentados como resultado da busca, constituem um conjunto. Depois, você pode selecionar somente aqueles sites indicados pelo seu antivírus como seguros. Daí, um novo conjunto, que é subconjunto do anterior.

Definimos com **subconjunto de um conjunto A** , o conjunto formado somente por elementos que pertencem a A . Veja o exemplo seguinte.

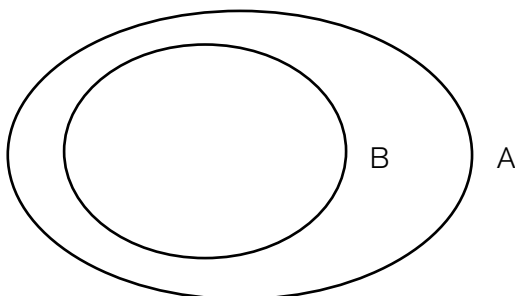


EXEMPLO

Exemplo 1.1

Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Podemos considerar o conjunto $B = \{2, 4, 6\}$ como um subconjunto de A . Nesse caso, dizemos que “ A contém B ” ($A \supset B$) ou que “ B está contido em A ” ($B \subset A$).

Se um conjunto B está contido em A ($B \subset A$), dizemos que se $x \in B$, então $x \in A$. Podemos representar essa relação também através de diagramas. Veja.



$$B \subset A \text{ ou } A \supset B$$

Os símbolos \in (“pertence a”) e \notin (“não pertence a”), que vimos na seção anterior, somente devem ser utilizados quando se deseja indicar a relação existente entre um elemento e um conjunto. Já os símbolos \subset (“está contido”) e $\not\subset$ (“não está contido”) são utilizados para indicar a relação existente entre dois conjuntos. Por exemplo, considere o conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ e os seus subconjuntos $B = \{a, b\}$ e $C = \{b\}$. A partir deles podemos, por exemplo, escrever:

- $a \in A$;
- $a \in B$;
- $a \notin A$;
- $b \in C$;
- $\{b\} \subset C$;
- $B \subset A$;
- $C \subset B \subset A$;
- $\emptyset \subset A$.

Destacamos que todo conjunto pode ser considerado um subconjunto de si mesmo, ou seja, qualquer que seja o conjunto A , temos $A \subset A$ ou $A \supset A$.

Quando um conjunto não possui nenhum elemento ele é denominado **conjunto vazio** e pode ser representado por $\{\}$ ou \emptyset .

Se um conjunto V é vazio, podemos representá-lo por $V = \{ \}$ ou $V = \emptyset$. Tome certo cuidado, pois, se você escrever $V = \{\emptyset\}$ a representação é de um conjunto formado por um elemento que é o símbolo entre chaves. Portanto, deixa de ser um conjunto vazio.

Exemplo 1.2

Alguns exemplos de conjuntos vazios são apresentados a seguir:

- $A = \{x \mid x \text{ é um dia semana começado com letra "r"}\}$
- $B = \{y \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1 \}$
- $C = \{\text{números primos pares maiores que } 2\}$

Um **conjunto unitário** é aquele que possui apenas um elemento.

Para um conjunto genérico A , temos também o chamado conjunto das partes de A , que é o conjunto cujos **elementos são todos os subconjuntos de A** . Veja o exemplo a seguir:

Exemplo 1.3

Dado o conjunto $A = \{2, 3, 4\}$, o conjunto das partes de A , que denotaremos por $P(A)$ é dado por:

$$P(A) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$$

Observe que o conjunto vazio é um dos elementos do conjunto das partes de A . Vale também observar que os elementos de um conjunto das partes também são conjuntos. Então, nesse caso, podemos, por exemplo, utilizar as relações de pertinência:

$$\emptyset \in P(A), \{2\} \in P(A) \text{ e } \{2, 3, 4\} \in P(A)$$

Um conjunto é classificado como **conjunto finito** quando possui uma quantidade limitada de elementos. Veja, a seguir, alguns exemplos de conjuntos finitos e diferentes formas de representá-los.

Exemplo 1.4

- a) Conjunto das letras vogais: $A = \{a, e, i, o, u\}$.
- b) Conjuntos dos números primos menores que 20: $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 19\}$.
- c) Conjunto dos números ímpares menores que 50: $C = \{1, 3, 5, 7, \dots, 49\}$.

Note, no caso apresentado no item (c), que, como há uma grande quantidade de elementos no conjunto, podemos colocar apenas os seus primeiros elementos, até que fique evidente a propriedade que os define e, em seguida, colocamos reticências e o último dos elementos.

Um conjunto infinito é aquele que possui uma quantidade ilimitada de elementos. Veja alguns exemplos a seguir.

Exemplo 1.5

- a) Conjunto de todos os números pares positivos: $D = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$
- b) Conjunto dos números naturais: $N = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

O conjunto apresentado no item (b) é um tipo de conjunto numérico que será estudado mais adiante. Também veremos outros tipos e outras formas de representação de conjuntos infinitos.

Dizemos que dois (ou mais conjuntos) são **iguais** quando possuem exatamente os mesmos elementos. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 1.6

Considere os seguintes conjuntos:

- $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
- $B = \{6, 5, 4, 3, 2\}$
- $C = \{2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

Podemos afirmar que os conjuntos A e B são iguais, pois possuem os mesmos elementos. O fato de eles estarem em ordens diferentes não nos impede de concluir pela igualdade entre os conjuntos. Costumamos ordenar os números (ou letras, quando for o caso) por uma questão apenas de organização. Mas, quando alteramos a ordem dos elementos de um conjunto, este continua sendo o mesmo.

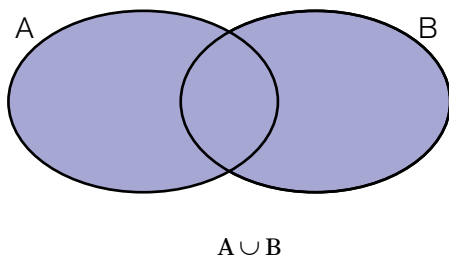
Com relação ao conjunto C não podemos dizer que ele é igual aos conjuntos A e B, pois ele possui outros elementos que não pertencem a estes dois últimos. O uso das reticências nos faz concluir, inclusive, que ele é um conjunto com infinitos elementos.

1.3 Operações elementares em conjuntos

Veremos, a seguir, as operações que podemos realizar com os conjuntos. Tais operações serão úteis na resolução de alguns problemas lógicos.

1.3.1 União

Dados dois conjuntos A e B, a sua **união**, denotada por “ $A \cup B$ ” é um conjunto formado por todo elemento que pertence a A ou a B ou a ambos.



Utilizando a notação de conjuntos, podemos definir a união como:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

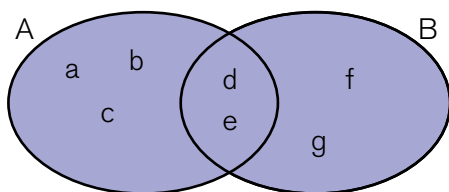
★ EXEMPLO

Exemplo 1.7

Sejam $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{d, e, f, g\}$. A união de A com B é dada por:

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}.$$

A união de A e B, desse exemplo, também pode ser apresentada através de diagramas como a seguir.

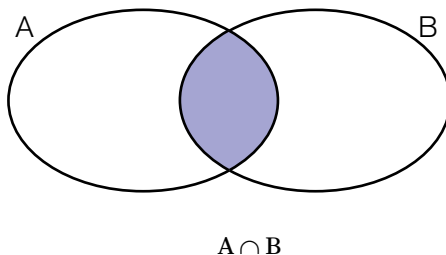


1.3.2 Intersecção

Dados dois conjuntos A e B, a **intersecção** de ambos, denotada por “ $A \cap B$ ” é um conjunto formado por todo elemento de A que também pertence a B. Em outras

palavras, a intersecção entre dois conjuntos é um conjunto formado pelos elementos comuns a ambos.

A representação da intersecção através de digramas pode ser feita da seguinte forma:



Utilizando a notação de conjuntos, podemos definir a intersecção como:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}.$$



EXEMPLO

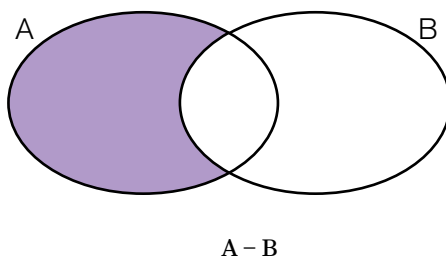
Exemplo 1.8

Sejam $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{d, e, f, g\}$. A intersecção de A com B é dada por:

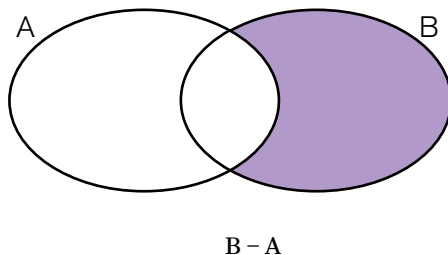
$$A \cap B = \{d, e\}.$$

1.4 Diferença

Dados dois conjuntos A e B, a **diferença** entre eles, nesta ordem, denotada por “ $A - B$ ” é um conjunto formado por todo elemento de A que não pertence a B.



Diferentemente das operações de união e intersecção, a diferença não apresenta a propriedade comutativa, isto é, se alterarmos a ordem dos conjuntos que estão operando, temos um novo resultado. Veja, abaixo, a representação da operação “ $B - A$ ”.



Utilizando a notação de conjuntos, podemos definir as diferenças “ $A - B$ ” e “ $B - A$ ”, respectivamente, como:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

$$B - A = \{x \mid x \in B \text{ e } x \notin A\}$$



EXEMPLO

Exemplo 1.9

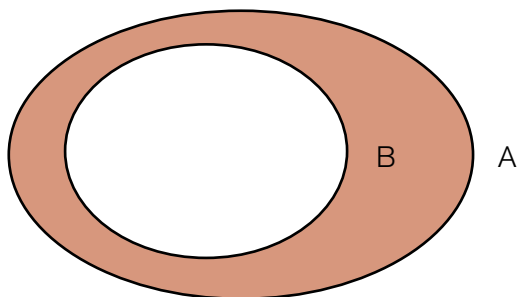
Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$. Podemos estabelecer as diferenças

$A - B = \{1, 3, 5\}$ e $B - A = \{6\}$.

1.4.1 Complementar

Dados dois conjuntos A e B que $A \subset B$, definimos o complementar de A em relação a B , denotado por “ A^c ” ou “ \bar{A} ”, como o conjunto formado por todo elemento de B que não pertence a A .

A representação do complementar de A em relação a B , através de digramas, pode ser feita na forma:



Utilizando a notação de conjuntos, podemos definir o complementar de A em relação a B como:

$$\bar{A} = \{x \mid x \in B \text{ e } x \notin A\}.$$



EXEMPLO

Exemplo 1.10

Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$. O complementar de A em relação a B é dado por $\bar{A} = \{4, 6, 9\}$.



CONEXÃO

Um vídeo que apresenta de forma interessante a teoria de conjuntos está no endereço: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1075>. Vale a pena conferir!

1.5 Aplicações das operações com conjuntos e princípio da inclusão e exclusão

Nesta seção, apresentaremos exemplos de problemas cujas resoluções podem ser efetuadas com auxílio da teoria de conjuntos e um princípio simples, denominado **princípio da inclusão e exclusão**, que refere-se ao número de elementos da união de dois ou mais conjuntos. Representar tais situações através de diagramas e compreender o significado das operações com conjuntos são recursos bastante interessantes para ajudar na compreensão, análise e resolução dos problemas.



EXEMPLO

Exemplo 1.11

A quantidade de elementos em um conjunto A é 20, num conjunto B é 12 e na intersecção de ambos é 5. Qual é a quantidade de elementos da união de A com B?

Esse é um problema bem elementar. Não é difícil chegar a sua resposta. O que se deseja determinar, aqui, é $n(A \cup B)$ sabendo que $n(A) = 20$, $n(B) = 12$ e $n(A \cap B) = 5$. Se somarmos $n(A) = 20$ com $n(B) = 12$, obtemos 32 elementos. Mas, nessa soma, os 5 elementos da intersecção de A com B foram considerados duas vezes, pois pertencem a A e a B. Devemos, portanto, subtrair 5 do resultado da soma, obtendo o valor 27.

Esse procedimento para determinar a quantidade de elementos na união de dois conjuntos é denominado **princípio da inclusão e exclusão** e pode ser generalizado. Sendo assim, podemos escrever que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

E se desejarmos determinar a quantidade de elementos de 3 conjuntos, como podemos escrever essa relação? Isso fica como exercício (veja a atividade 16 ao final deste capítulo).

Exemplo 1.12

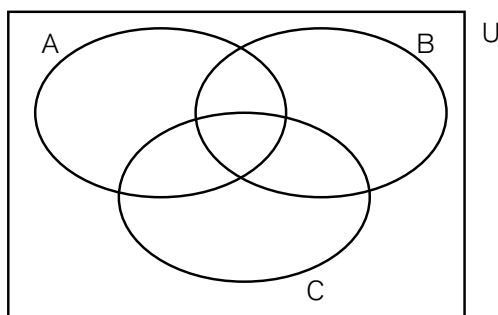
Uma pesquisa de mercado foi realizada com 450 consumidores para que indicassem o consumo de um ou mais de três produtos selecionados, A, B e C. Alguns dos resultados obtidos são apresentados a seguir:

- 40 consomem os três produtos;
- 60 consomem os produtos A e B;
- 100 consomem os produtos B e C;
- 120 consomem os produtos A e C;
- 240 consomem o produto A;
- 150 consomem o produto B.

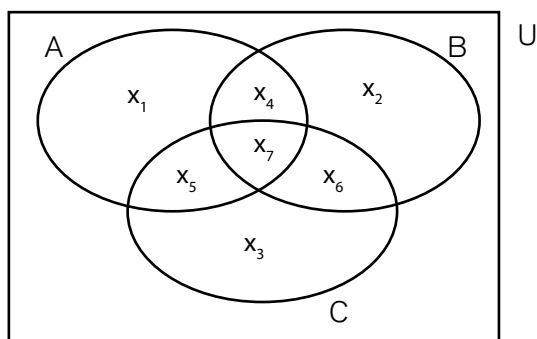
Considerando que 50 das pessoas que responderam que não consomem nenhum dos três produtos, responda:

- a) Quantas consomem somente o produto C?
- b) Quantas consomem pelo menos dois produtos?
- c) Quantas consomem o produto A e o produto B e não consomem o produto C?

Uma forma bem interessante e ágil de resolver esse problema é utilizando diagramas para os três conjuntos A, B e C que são, respectivamente, aqueles que representam os entrevistados que consomem os produtos A, B e C. Esses três conjuntos estão contidos num conjunto maior que denominamos **conjunto universo U** (que contém todas as pessoas participantes da pesquisa). Temos, então, a seguinte representação:



Com as informações dadas, podemos preencher parte dos espaços definidos pelos conjuntos A, B e C. Para facilitar a indicação dos cálculos e do raciocínio utilizados na resolução, vamos denotar por x_1, x_2, \dots, x_8 as quantidades das regiões determinadas pelo conjunto universo e pelos conjuntos A, B e C, como mostra a figura seguinte:



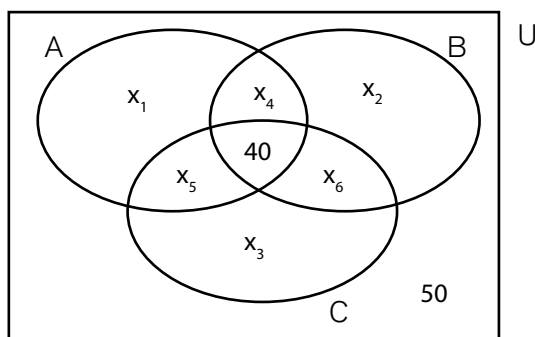
Quando você estiver resolvendo problemas desse tipo, não é preciso utilizar as incógnitas x_1, x_2, \dots, x_8 da forma que apresentamos aqui. Os valores obtidos para tais incógnitas podem ser lançados diretamente nos diagramas. Esse procedimento está sendo feito apenas para tornar as explicações mais claras.

Cada valor x refere-se à quantidade de pessoas que consome um ou mais produtos. A seguir, a indicação da representação de cada valor:

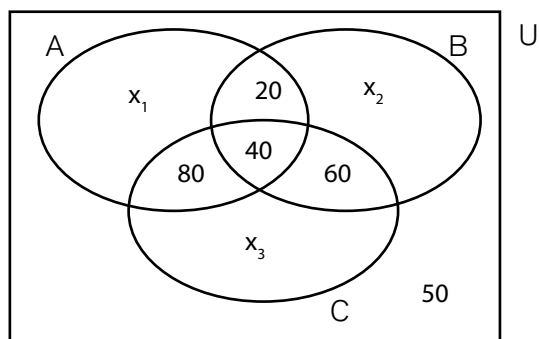
- x_1 : quantidade de entrevistados que consomem somente o produto A.
- x_2 : quantidade de entrevistados que consomem somente o produto B.
- x_3 : quantidade de entrevistados que consomem somente o produto C.
- x_4 : quantidade de entrevistados que consomem somente os produtos A e B.
- x_5 : quantidade de entrevistados que consomem somente os produtos A e C.
- x_6 : quantidade de entrevistados que consomem somente os produtos B e C.
- x_7 : quantidade de entrevistados que consomem os três produtos.
- x_8 : quantidade de entrevistados que não consomem nenhum dos três produtos.

Se começarmos, por exemplo, pela informação “240 consomem o produtos A”, teremos dificuldade para distribuir esse valor corretamente. O mesmo acontece, por exemplo, com informações do tipo “60 consomem os produtos A e B”, pois ela nos remete à intersecção dos conjuntos A e B. No entanto, essa intersecção está dividida em duas regiões. Devemos, portanto, começar com as informações “40 consomem os três produtos” e “há 50 pessoas que responderam que não consomem nenhum dos três produtos”. Essas informações nos indicam, sem deixar dúvida alguma, os valores de x_7 e x_8 , respectivamente.

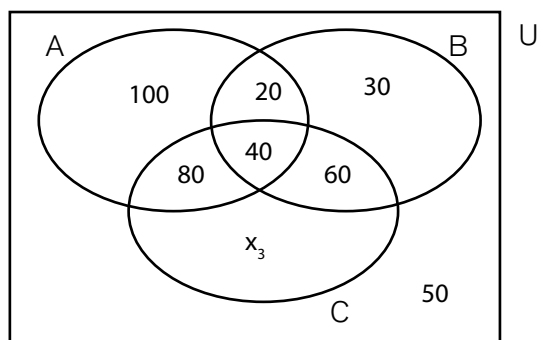
Assim, podemos atualizar as informações dos diagramas:



Agora, podemos inserir as informações que referem-se às pessoas que consomem dois dos três produtos, obtendo os valores de x_4 , x_5 e x_6 . Vamos ver, por exemplo, como determinar o valor de x_4 . Como há 60 pessoas que consomem os produtos A e B, mas já vimos que há 40 que consomem A, B e C (e, portanto consomem A e B), então o valor de x_4 é obtido através da diferença $60 - 40 = 20$. De forma análoga determinamos os valores 80 e 60 para x_5 e x_6 , respectivamente. E, dessa forma, o diagrama fica assim:



Finalmente, utilizamos as informações “240 consomem o produto A” e “150 consomem o produto B”. Como no diagrama de A já há 140 pessoas (20 + 40 + 80), então o valor de x_1 é 100. No caso do diagrama de B, o valor de x_2 é igual 30 (150 menos a soma de 20, 40 e 60). Nosso diagrama, agora, está quase completo. Veja:



Agora, falta-nos determinar o valor de x_3 (que é quantidade de pessoas que consomem somente o produto C). Se somarmos todas as quantidades do diagrama (incluindo o valor de x_3), temos que obter o resultado 450 (total de pessoas participantes da pesquisa). O valor de x_3 será obtido, portanto, da seguinte forma:

$$x_3 = 450 - (100 + 20 + 30 + 80 + 40 + 60 + 50)$$

$$x_3 = 450 - 380$$

$$x_3 = 70$$

Portanto, as respostas das alternativas são:

- a) 70 pessoas;
- b) $20 + 80 + 60 + 40 = 200$ pessoas;
- c) $100 + 20 + 30 = 150$ pessoas.

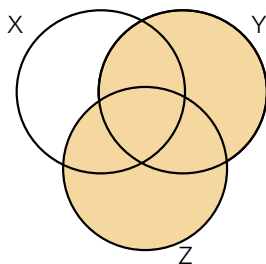
Exemplo 1.13

Considere três conjuntos X , Y e Z tais que:

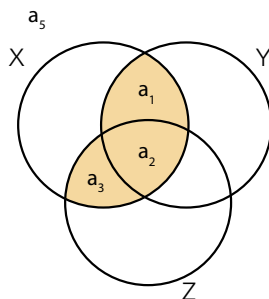
- $n(X \cap Y) = 26$
- $n(X \cap Z) = 10$
- $n(X \cap Y \cap Z) = 7$

Qual é quantidade de elementos do conjunto $X \cap (Y \cup Z)$?

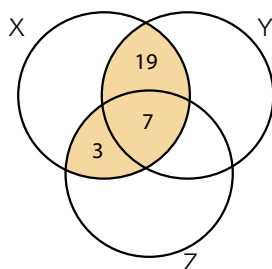
Podemos iniciar construindo os diagramas dos conjuntos X , Y e Z e destacando a área que representa o conjunto $X \cap (Y \cup Z)$ para sabermos quais valores serão necessários para que cheguemos ao resultado do problema. A união de Y e Z pode ser representada como na figura abaixo.



Dessa forma, a intersecção dessa união com o conjunto X , que é representada por $X \cap (Y \cup Z)$ pode ser representada como mostrado na figura abaixo.



Os valores a_1 , a_2 e a_3 mostrados na figura podem ser determinados a partir das informações dadas no enunciado do problema. Como $n(X \cap Y \cap Z) = 7$, concluímos que $a_1 = 7$. Como $n(X \cap Y) = 26$ e já temos $a_1 = 7$, então $a_2 = 19$, pois a soma de a_1 com a_2 tem que ser igual a 26. De forma semelhante, chegamos ao valor de a_3 que é 3 ($10 - 7$). O diagrama com os valores é apresentado a seguir.



$$\text{Logo, } n(X \cap (Y \cup Z)) = 19 + 7 + 3 = 29.$$

Nas atividades deste capítulo há mais uma série de problemas que podem ser resolvidos através da utilização da teoria de conjuntos. Ressalte-se que essa não é a única forma de resolução de tais problemas, mas a clareza que tais procedimentos conferem à modelagem do problema, permitindo-nos raciocinar de forma lógica, faz com que seja uma das formas mais utilizadas nesses casos. O cálculo de probabilidades também utiliza frequentemente a teoria de conjuntos.

Você verá, mais adiante, que em outros assuntos da matemática também há referências aos conjuntos e às suas operações, como, por exemplo, na resolução de equações e nos problemas de lógica matemática.

1.6 Conjuntos numéricos

O desenvolvimento da Matemática sempre teve estreita ligação com necessidades humanas. Pode nos parecer, por vezes, que essa ciência é exageradamente abstrata, mas ela nos proporciona técnicas muito eficientes para a resolução de problemas práticos e concretos de nosso cotidiano, seja em nossa vida particular ou profissional.

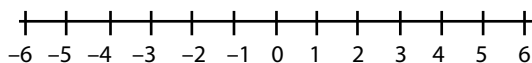
Assim como nos primeiros anos de nossas vidas, passamos a ter a necessidade de efetuar contagens, na história do homem não ocorreu de forma diferente. Havia a necessidade primária de se contar os animais de um rebanho, por exemplo. Começa, então, a surgir a ideia dos números que hoje denominamos **naturais**. O conjunto dos **números naturais**, que denotamos por \mathbb{N} , é:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Em certa época de seu desenvolvimento, com o surgimento do comércio, o homem passa a ter a necessidade de uma representação para a “falta” de algo. É como nos dias de hoje representamos um saldo devedor em uma conta corrente. Originou-se então o conceito de números negativos e a união deles com os naturais resultou no conjunto dos **números inteiros**, denotado por \mathbb{Z} :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Podemos representar o conjunto \mathbb{Z} na reta numérica da seguinte forma:



O sinal “-”, que utilizamos para representar valores negativos, confere ao número o significado de **oposto** ou **simétrico**, ou seja, aquele valor que está à mesma distância do zero, mas do outro lado (lado oposto) da reta numérica. O valor “-4”, por exemplo, é o oposto (ou simétrico) de “4”. Decorre de seu significado aquela regra tão mencionada de que “menos com menos dá mais”. É que, se “-4” é o oposto de 4, então “-(-4)” é o oposto de “-4” que, por sua vez, é igual a 4 (positivo).

Com os números inteiros é possível realizar diversos cálculos importantes, mas quando necessitamos realizar divisões como, por exemplo, dividir o lucro em uma sociedade, mesmo que estejamos dividindo um número inteiro por outro também inteiro, essa divisão pode não ser exata, ou seja, há um resto diferente de zero ou o quociente é um número **não inteiro**.

Houve uma época em que o homem passou a ocupar propriedades e a ter necessidade de dividi-las. Nesse processo, percebeu a necessidade de uma representação para quantidades não inteiras, como resultado da divisão de dois números inteiros. Surgem, então, os **números racionais**, cujo conjunto é denotado por \mathbb{Q} :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Perceba que, nesse caso, não é possível representar o conjunto mostrando alguns de seus elementos, pois, entre dois números racionais há infinitos outros racionais. Quando nos referimos aos números naturais ou inteiros, se consideramos, por exemplo, as quantidades 4 e 5, sabemos que entre eles não

há nenhum outro inteiro ou natural. No entanto, com relação ao conjunto dos números racionais, se destacarmos dois números, por mais próximos que estejam, conseguimos determinar uma infinidade de outros valores racionais.

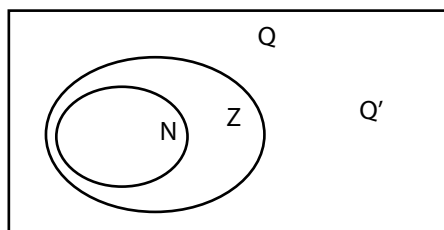
Por exemplo, entre os valores 4 e 5, temos 4,1; 4,2; 4,3; etc. Se tomarmos o 4 e o 4,1, temos 4,01; 4,02; 4,03; etc. Aumentando o número de casas decimais, sempre encontraremos outros racionais entre dois quaisquer.

Há números que não conseguimos escrever como uma fração de dois inteiros. Alguns exemplos são:

- o número π (aproximadamente 3,14), tão utilizado nos cálculos de áreas de círculos, comprimentos de circunferências e medidas de ângulos;
- o número e (aproximadamente 2,72), que é base do logaritmo natural e tem bastante utilização em cálculos financeiros, de crescimento exponencial entre outras;
- raiz quadrada de números primos $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, etc.

Tais números são denominados **irracionais** e podem ser denotados por Q' (conjunto complementar do conjunto dos números racionais).

Podemos dizer que o conjunto dos racionais contém o conjunto dos inteiros que, por sua vez, contém o conjunto dos naturais. E todo número que não pertence ao conjunto dos números racionais é considerado irracional. A união dos racionais e dos irracionais constitui o conjunto dos **números reais**. Este é denotado por R e compreende todos os números com os quais nos defrontamos em nosso cotidiano.



Conjunto dos números reais

Na Matemática, há um conjunto que contém o conjunto dos números reais, que é o conjunto dos **números complexos**, mas que não abordaremos pelo fato de seu uso ser muito específico e não apresentar utilidade para o seu curso.

1.7 Intervalos numéricos

Na maior parte das aplicações envolvendo conjuntos numéricos, fazemos referência ao conjunto dos números reais. E há três formas bem interessantes de representar esse conjunto, (e seus subconjuntos). Uma delas é utilizando a notação de conjuntos. As outras são representações que referem-se a intervalos, tanto de forma numérica como gráfica.

Esses intervalos podem ser **abertos**, **fechados** ou **semiabertos**. Vamos tomar certo cuidado. Quando falamos em intervalo aberto, não estamos querendo dizer que o intervalo é ilimitado. Vejamos a diferença no exemplo a seguir.



EXEMPLO

Exemplo 1.14

Considere um intervalo numérico composto por todos os números reais maiores ou igual a 2. Este é um intervalo que nós consideramos ilimitado, pois não há nenhum valor que o limite superiormente. À esquerda ele é limitado pelo valor 2. Dizemos, inclusive, que ele é **fechado** à esquerda, o que significa dizer que o seu menor valor é o 2.

Agora considere o intervalo composto por todos os números reais maiores que 2 e menores que 5. Este intervalo contém, assim como o anterior, infinitos valores reais. Mas, isto não significa que ele seja ilimitado. Ele possui limites: o 2 e o 5. Contudo, note que esses valores não pertencem ao intervalo. Além disso, dizemos que este intervalo é **aberto**, tanto à esquerda quanto à direita. Mas por que **aberto**?

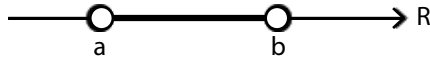
O termo **aberto**, nesse caso, refere-se ao fato que o intervalo não possui um valor mínimo e nem máximo. Mas, ele é limitado! Tente responder à pergunta: qual é o menor valor do intervalo?

A resposta não é “2” porque ele não pertence ao intervalo. Você pode pensar no “2,1”, por exemplo. Mas, há infinitos valores menores que o “2,1” e que são maiores que “2”. Eis alguns deles: 2,01; 2,08; 2,002; 2,0001; entre tantos outros. Então, não confunda intervalo **aberto** com intervalo **ilimitado**.

A seguir, veremos as três formas que podemos utilizar para representar intervalos numéricos reais e os tipos de intervalos.

Intervalos abertos

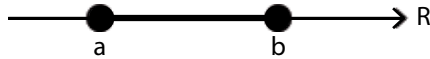
$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$



O intervalo $]a, b[$ é composto por todo número real maior que a e menor que b .

Intervalos fechados

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$



O intervalo $[a, b]$ é composto por todo número real maior que a e menor que b e também pelos valores a e b .

Intervalos semiabertos

Um intervalo pode ser aberto de um lado e fechado de outro. Vejamos.

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$$



O intervalo $[a, b[$ é composto por todo número real maior ou igual a a e menor que b .

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$$



O intervalo $]a, b]$ é composto por todo número real maior que a e menor ou igual a b .

Intervalos infinitos

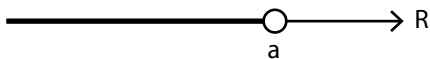
Um intervalo pode ser fechado de um lado e ilimitado do outro ou, ainda, aberto de um lado e ilimitado do outro. Vejamos:

$$[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$$



O intervalo $[a, \infty[$ é composto por todo número real maior ou igual a a . O símbolo “ ∞ ” indica o infinito.

$$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$$



O intervalo $] -\infty, a[$ é composto por todo número real menor que a .

Como os intervalos reais são conjuntos numéricos, é possível realizar, com eles, as operações de união, intersecção, diferença e complementar as apresentadas anteriormente. Mas, nesse caso a determinação dessas operações ficará como exercício.

CONEXÃO

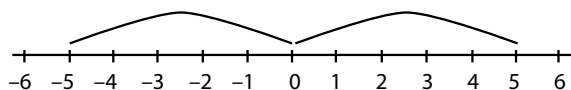
Um vídeo muito interessante que apresenta, entre outras coisas, a história do desenvolvimento do sistema de numeração indo-arábico está disponível no endereço: http://tvescola.mec.gov.br/index.php?option=com_zoo&view=item&item_id=256.

Vale a pena assisti-lo, principalmente a primeira parte. Seus produtores defendem a valiosa contribuição dos chineses na construção de nosso sistema de numeração. E o desenvolvimento dos sistemas de numeração têm íntima relação com o surgimento dos conjuntos numéricos. Ele está dividido em duas partes, sendo que somente a primeira trata desse assunto. O nome do vídeo é “**Os Gênios do Oriente**”.

1.8 Valor absoluto de um número

Das ilimitadas aplicações que fazemos com os números em nosso cotidiano, sejam eles positivos, negativos ou nulo, há algumas (e não são poucas!) em que nos interessa apenas a distância de cada um deles até o zero (que é a origem da reta numérica real). Isto quer dizer que podemos não estar interessados no “sinal” do número, mas apenas na magnitude que ele representa.

Essa distância de cada número até o zero, na reta numérica, é denominada **módulo** ou **valor absoluto** desse número. Na figura seguinte, veja a representação dos módulos de 5 e -5 .



O exemplo a seguir apresenta os módulos de mais alguns valores reais.



EXEMPLO

Exemplo 1.15

- a) $|5| = 5$
- b) $|-5| = 5$
- c) $|0| = 0$
- d) $|-2,85| = 2,85$
- e) $\left|\frac{2}{5}\right| = \frac{2}{5}$

De forma geral, dado um número a real qualquer, como podemos determinar seu módulo?

Se a for positivo, seu módulo será o próprio a . Se for negativo, seu módulo será o seu oposto. Se for nulo, seu módulo será zero. Simbolicamente, temos:

$$|a| = a, \text{ se } a > 0;$$

$$|a| = 0, \text{ se } a = 0;$$

$$|a| = -a, \text{ se } a < 0.$$

Como podemos determinar o módulo de uma expressão algébrica?

Veja no exemplo a seguir.

Exemplo 1.16

Para determinar o módulo $|3x + 7|$, devemos considerar as seguintes possibilidades:

- I. $|3x + 7| = 3x + 7$, se $3x + 7 > 0$, ou seja, se $x > -\frac{7}{3}$;
- II. $|3x + 7| = 0$, se $3x + 7 = 0$, ou seja, se $x = -\frac{7}{3}$;
- III. $|3x + 7| = -(3x + 7)$, se $3x + 7 < 0$, ou seja, se $x < -\frac{7}{3}$;

Nos exemplos a seguir, veja algumas situações que podem ser solucionadas utilizando a definição de módulo apresentada acima.

Exemplo 1.17

Resolva a equação $|x - 7| = 2$.

Para resolver equações que envolvem o módulo da incógnita, é preciso, primeiro, “eliminar” esse módulo. Nesse caso, temos que considerar:

- I. $|x - 7| = x - 7$, se $x - 7 > 0$, ou seja, se $x > 7$. Daí, temos $x - 7 = 2 \rightarrow x = 9$;
- II. $|x - 7| = -(x - 7)$, se $x - 7 < 0$, ou seja, se $x < 7$. Daí, temos $-x + 7 = 2 \rightarrow x = 5$.

Não consideramos, nesse caso, a possibilidade do módulo de $x - 7$ ser igual a zero pelo fato de, na equação, ele estar igualado a 2.

Portanto, o conjunto solução da equação acima é $S = \{5, 9\}$.

Exemplo 1.8

Resolva a equação $\left| \frac{-x+4}{2} \right| = x-1$.

Inicialmente, consideramos que:

- I. $\left| \frac{-x+4}{2} \right| = \frac{-x+4}{2}$, se $\frac{-x+4}{2} > 0$, ou seja, se $x < 4$. Daí, temos
$$\left| \frac{-x+4}{2} \right| = x-1 \Rightarrow \frac{-x+4}{2} = x-1 \Rightarrow -x+4 = 2x-2 \Rightarrow x = 2.$$
- II. $\left| \frac{-x+4}{2} \right| = 0$, se $\frac{-x+4}{2} = 0$, ou seja, se $x = 4$. Daí, temos
$$\left| \frac{-x+4}{2} \right| = x-1 \Rightarrow 0 = x-1 \Rightarrow x = 1$$
- III. $\left| \frac{-x+4}{2} \right| = -\frac{-x+4}{2}$, se $\frac{-x+4}{2} < 0$, ou seja, se $x > 4$. Daí, temos
$$\left| \frac{-x+4}{2} \right| = x-1 \Rightarrow -\frac{-x+4}{2} = x-1 \Rightarrow x-4 = 2x-2 \Rightarrow x = -2.$$



ATIVIDADES

01. Represente através de diagramas de Venn, os seguintes conjuntos:

- a) $(A \cap B) - C$
- b) $A - (B \cup C)$
- c) $(B - A) \cup (B - C)$
- d) $(B - A) \cap (B - C)$

02. Utilizando diagramas, verifique a validade das seguintes propriedades:

- a) Se $A \subset B$, então $A \cap B = A$ e $A \cup B = B$.
- b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (propriedade associativa)
- c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (propriedade associativa)
- d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (propriedade distributiva)

03. Dados os conjuntos $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $C = \{6, 8\}$, determine:

- a) $A \cup B$
- b) $A \cap (B \cap C)$
- c) Complementar de C em relação a A .
- d) $A - C$
- e) Complementar de $B \cap C$ em relação a A .
- f) $A \cup (B \cap C)$
- g) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

04. Dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} / 6 \leq x < 9\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} / 7 < x \leq 9\}$, determine:

- a) $A \cup B$
- b) $A \cap B$
- c) $B - A$

05. Dados os conjuntos $A = [-2, 6[$ e $B = [2, 8[$, determine e represente graficamente os conjuntos:

- a) $A \cup B$
- b) $A \cap B$
- c) $B - A$

06. Considere os intervalos reais $A =]3, 7]$, $B = [5, \infty[$ e $C =]-\infty, 4[$. Determine:

- a) $A \cup B$
- b) $B \cup C$
- c) $A \cap B$
- d) $A \cap C$
- e) $A - B$
- f) $B - C$
- g) $C - B$
- h) O complementar de A em relação ao conjunto dos números reais (\mathbb{R}).
- i) O complementar de B em relação ao conjunto dos números reais (\mathbb{R}).
- j) O complementar de C em relação ao conjunto dos números reais (\mathbb{R}).

07. Uma pesquisa sobre o consumo de três produtos A, B e C foi realizada e os resultados são apresentados na tabela a seguir:

PRODUTOS	A	B	C	A e B	A e C	B e C	A e B e C	Nenhum
QUANTIDADE DE CONSUMIDORES	120	70	230	30	25	40	15	x

- Determine a quantidade de pessoas entrevistadas que consomem:
- Somente o produto B;
 - Somente um produto;
 - Somente dois produtos;
 - A ou B;
 - A, mas não consomem C;

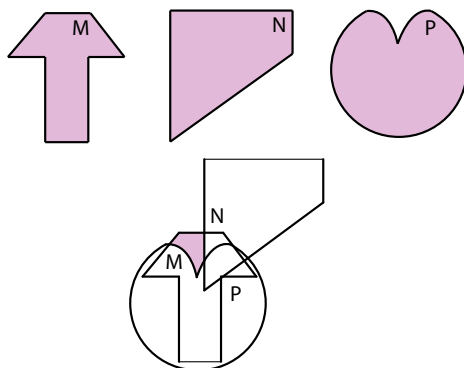
08. (PUC-RJ) Um levantamento sócio-econômico entre os habitantes de uma cidade revelou que, exatamente: 17% têm casa própria; 22% têm automóvel; 8% têm casa própria e automóvel. Qual o percentual dos que não têm casa própria nem automóvel?

09. (PUC) Numa comunidade constituída de 1800 pessoas há três programas de TV favoritos: Esporte (E), novela (N) e Humanismo (H). A tabela abaixo indica quantas pessoas assistem a esses programas.

PROGRAMAS	E	N	H	E e N	E e H	N e H	E, N e H	Nenhum
NO DE TELESPECTADORES	400	1200	1080	220	180	800	100	x

- Através desses dados verifica-se que o número de pessoas da comunidade que não assistem a qualquer dos três programas é:
- 200
 - Os dados do problema estão incorretos.
 - 900
 - 100
 - N.d.a.

10. (UFF) Os conjuntos não-vazios M, N e P estão, isoladamente, representados abaixo. Considere a seguinte figura que estes conjuntos formam.



A região hachurada pode ser representada por:

- | | |
|------------------------|------------------------|
| a) $M \cup (N \cap P)$ | d) $N - (M \cup P)$ |
| b) $M - (N \cup P)$ | e) $N \cup (P \cap M)$ |
| c) $M \cap (N - P)$ | |

11. (UFG) A afirmação "Todo jovem que gosta de Matemática adora esportes e festas" pode ser representada segundo o diagrama:

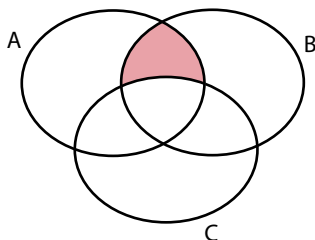
$M = \{\text{jovens que gostam de matemática}\}$

$E = \{\text{jovens que adoram esportes}\}$

$F = \{\text{jovens que adoram festas}\}$

- | | |
|----|----|
| a) | d) |
| b) | e) |
| c) | |

12. (UFAL) Na figura abaixo têm-se representados os conjuntos A, B e C, não disjuntos.



A região sombreada representa o conjunto:

- a) $C - (A \cap B)$
- b) $(A \cap B) - C$
- c) $(A \cup B) - C$
- d) $A \cup B \cup C$
- e) $A \cap B \cap C$

13. Estabeleça uma fórmula que sirva para determinar a quantidade de elementos da união de três conjuntos A, B e C.

14. Resolva as seguintes equações modulares:

a) $|5x - 7| = \frac{1}{2}$

b) $\left| \frac{x-1}{x} \right| = 0$

c) $\left| \frac{3x-1}{2-x} \right| = 3$

d) $|2 - 5x| = |x + 4|$



REFLEXÃO

Diversos problemas com os quais nos deparamos podem ser resolvidos de várias formas. Algumas são mais diretas e simples, outras mais complexas e elaboradas. O papel da Matemática, nesses casos, é oferecer formas claras e simples de resolver tais problemas. Como muitos deles apresentam semelhanças, é comum se estabelecer modelos matemáticos de resolução. E um desses modelos foi abordado nesta unidade quando utilizamos as operações

com conjuntos na resolução de problemas lógicos. Determinar a quantidade de elementos que pertencem à intersecção e à união de dois ou mais conjuntos, bem como determinar a quantidade de elementos que cada conjunto possui, entre outras informações, foi de grande utilidade na resolução de diversos problemas de ordem prática.

Além das aplicações aqui apresentadas, os conjuntos são utilizados na definição de funções matemáticas, por exemplo, e em muitos outros assuntos da Matemática. Têm larga utilização também no cálculo de probabilidades.

Estudamos também os intervalos reais (que são conjuntos numéricos) e o módulo ou valor absoluto de um número. São entes matemáticos de larga aplicação no estudo de funções.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARRETO, Márcio. **Trama matemática:** princípios e novas práticas no ensino médio. 1ª Ed. Campinas, SP: Papirus, 2013.

DEMANA, F. D.; WAITS, B. K.; FOLEY, G. D.; KENNEDY, D. **Pré-cálculo.** 7a edição. São Paulo: Pearson, 2009.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A.; DEGENSAJN, D.; PERIGO, R. **Matemática.** Vol. Único. Editora Atual, 2006.

LEITE, Álvaro Emílio; CASTANHEIRA, Nelson Pereira. **Teoria dos números e teoria dos conjuntos.** 1ª Ed. Curitiba: InterSaberes, 2014.

SÉRATES, J. **Raciocínio lógico:** lógico matemático, lógico quantitativo, lógico numérico, lógico analítico, lógico crítico. 8ª ed. Brasília: Jonofon Ltda, 1998.

2

Contagem

2. Contagem

A origem da Matemática está ligada à necessidade do homem em realizar contagens. E, nos dias atuais, continuamos a aplicar processos de contagens em diversas situações-problemas. Você, por exemplo, nunca teve interesse em saber quantos jogos diferentes podem ser feitos numa loteria do tipo da Mega Sena? Ou qual é a chance de alguém descobrir, ao acaso, a senha do seu cartão bancário?

Há uma parte da Matemática, denominada **Análise Combinatória**, que trata desses e de outros processos de contagem. Trata-se de uma ferramenta importante na resolução de diversos problemas de nosso cotidiano e no cálculo de probabilidades. Neste capítulo, veremos algumas técnicas bastante úteis que envolvem contagem de eventos.



OBJETIVOS

- Compreender diferentes técnicas de contagem de eventos;
- Aplicar técnicas de contagem na resolução de problemas.

2.1 Princípio das casas de pombos

Há, na Matemática, diversos princípios bem simples, e que nos parecem completamente óbvios. No entanto, apesar da simplicidade, têm uma infinidade de aplicações. Talvez seja aí que comecem a surgir as dificuldades: conseguir relacionar tais princípios, ou a teoria, de forma geral, com as aplicações práticas.

O **princípio das casas de pombos** (ou **princípio das gavetas**) é um deles. Ele trabalha com uma ideia bem simples. Considere, por exemplo, que existam 5 pombos e 4 casas nas quais iremos acomodá-los. Se tentarmos distribuir igualmente os pombos nessas casas, concluiremos que uma das casas deverá acomodar dois pombos.

Em sua forma mais simples, este princípio pode ser enunciado como a seguir.

"Se tivermos $n + 1$ pombos para serem colocados em n casas, então, pelo menos uma casa, deverá conter, pelo menos, dois pombos"

Realmente, muito simples! Concorda?

Mas, nas aplicações que fazemos desse princípio na resolução de situações-problemas envolvendo contagens, a dificuldade pode aparecer na determinação de qual grandeza representa a quantidade de “pombos” e qual representa a quantidade de “casas”.

Vamos, então, ver três exemplos para ilustrar a aplicação deste princípio.



EXEMPLO

Exemplo 2.1

Quantas pessoas, no mínimo, deve conter um grupo para que, pelo menos duas delas façam aniversário no mesmo mês?

Nesse caso, consideramos como “número de casas” a quantidade de meses do ano, ou seja, $n = 12$. Já o “número de pombos” relaciona-se com a quantidade de pessoas no grupo. Então, devemos ter $n + 1 = 12 + 1 = 13$ pessoas.

Exemplo 2.2

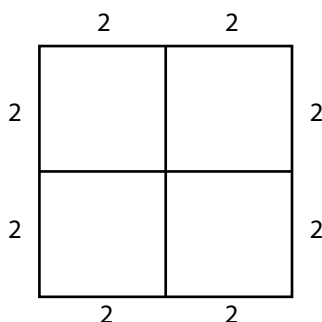
Num depósito há 10 caixas que contêm um certo tipo de componente eletrônico. Sabe-se que, em cada uma delas, há, no máximo 7 peças com defeito. Prove que há, no mínimo, duas caixas com a mesma quantidade de peças defeituosas.

Relacionamos a quantidade máxima de peças defeituosas de cada caixa com o “número de casas”, isto é, $n = 7$. Sendo assim, a quantidade mínima de caixas que deve haver no depósito para que, pelo menos, duas das caixas tenham a mesma quantidade de peças defeituosas é $n + 1 = 7 + 1 = 8$. Essa quantidade de caixas está associada ao “número de pombos” do princípio. Como há, no depósito, 10 caixas ($10 > 8$), então fica provado que há, no mínimo, duas caixas com a mesma quantidade de peças defeituosas.

Exemplo 2.3

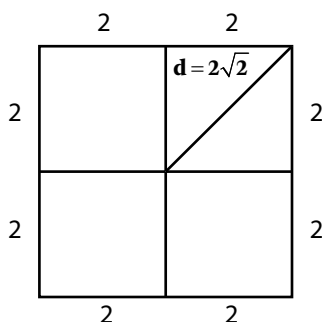
Se escolhermos cinco pontos de um quadrado de lado 4, mostre que, pelo menos, um dos segmentos determinados por dois desses pontos tem, no máximo, medida igual a $2\sqrt{2}$.

Podemos começar dividindo o quadrado em 4 outros quadrados de lado igual a 2, como mostra a figura a seguir.



Utilizando o teorema de Pitágoras, podemos determinar a medida da diagonal de cada um dos quadrados menores:

$$d^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow d = \sqrt{8} \rightarrow d = 2\sqrt{2}.$$



Dessa forma, podemos concluir que se tomarmos quaisquer dois pontos em um mesmo quadrado menor (de lado 2), a distância máxima entre eles será igual a $2\sqrt{2}$.

Associando a quantidade de quadrados menores ($n = 4$) ao "número de casas" e a quantidade de pontos ($n + 1 = 5$) ao "número de pombos", provamos que, pelo menos, dois pontos situam-se no mesmo quadrado menor. Sendo assim, há pelo menos dois pontos que distam, no máximo, $2\sqrt{2}$, um do outro.

2.2 Princípio da multiplicação e princípio da adição

Outros dois princípios bem simples e de muita utilidade prática são conhecidos por **princípio da multiplicação** e **princípio da adição**.

Vamos introduzi-los a partir de exemplos práticos.



EXEMPLO

Exemplo 2.4

O acesso a um servidor é feito mediante digitação de uma senha de quatro dígitos. Os dois primeiros são compostos por letras e os últimos por dígitos numéricos. As letras permitidas são a, b, c e d e os dígitos, 1, 2 e 3. Não pode haver repetição de nenhum dígito. Sendo assim, quantas senhas diferentes podem ser formadas?

Vamos dividir a senha em dois conjuntos: um conjunto X formado por todas as possibilidades de sequências de dois dígitos literais e outro, que denotaremos Y, formado por todas as possibilidades de sequências de dois dígitos numéricos.

Temos, então, o conjunto $X = \{ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc\}$ e o conjunto $Y = \{12, 13, 21, 23, 31, 32\}$.

Note que a quantidade de arranjos compostos por dois dígitos literais é igual a 12 e a de arranjos numéricos é igual a 6, isto é $n(X) = 12$ e $n(Y) = 6$.

Agora, conseguimos determinar a quantidade de senhas diferentes que podem ser formadas nesse sistema. Basta multiplicar as quantidades de elementos que cada um dos conjuntos possui: $12 \times 6 = 72$.

Utilizamos aí, o **princípio multiplicativo** que é apresentado, de forma geral, a seguir.

Se um evento A_i pode ocorrer de m_i maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer os eventos A_1, A_2, \dots, A_n de forma sucessiva é dado por $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$.

Note, no exemplo anterior, que para determinar a quantidade de elementos dos conjuntos X e Y também utilizamos o *princípio multiplicativo*. No caso do conjunto X, podemos dividir cada um de seus elementos em duas posições. Isto é, podemos determinar, por exemplo, dois conjuntos X_1 e X_2 cujas quantidades de elementos são respectivamente 4 e 3, pois o não pode haver repetição de dígito literal. Portanto, aplicando o princípio multiplicativo, a sua quantidade de elementos é igual a $4 \cdot 3 = 12$.

Da mesma forma, podemos aplicar esse princípio para determinar a quantidade de elementos do conjunto Y. Considerando Y_1 o conjunto de elementos do primeiro dígito numérico e Y_2 a quantidade de elementos do segundo, temos, para esses dois conjuntos, respectivamente, 3 e 2 elementos. Sendo assim, a quantidade total de possibilidades (número de elementos do conjunto X) é dada pelo produto $3 \cdot 2 = 6$.

Exemplo 2.5

Em um formulário eletrônico, os usuários preenchem alguns campos com informações pessoais, tais como: sexo (masculino/feminino), estado civil (casado/solteiro/separado judicialmente/viúvo/outros) e grau de escolaridade (fundamental/médio/superior). Um programador deseja agrupar os usuários que forneceram respostas exatamente iguais para esses três campos. Sendo assim, vamos responder as seguintes questões:

- a) Quantos grupos, no máximo, podem ser formados?
- b) Quantos usuários, no mínimo, devem preencher esse formulário para que haja pelo menos dois com respostas iguais?

Para responder ao item (a), podemos considerar que há três eventos, A_1 , A_2 e A_3 , que possuem, respectivamente, 2, 5 e 3 maneiras de ocorrer. Então, a quantidade total de grupos de respostas que podem ser formados é dada por $2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$. Aplicamos aqui o princípio multiplicativo.

No caso do item (b), podemos determinar o que se pede aplicando o princípio das casas de pombos. Vamos considerar como “número de casas” a quantidade de grupos diferentes que podem ser formados, que é 30. A quantidade mínima de usuários que devem preencher o formulário para que haja pelo menos dois com respostas coincidentes é, portanto, $30 + 1 = 31$, que estamos considerando como o “número de pombos”.

O próximo exemplo será utilizado para introduzir o **princípio aditivo**.

Exemplo 2.6

Considere, agora, um sistema de senhas em que o usuário pode escolher uma sequência numérica qualquer de dois, três ou quatro dígitos, de 0 a 9. Quantas senhas diferentes podem ser geradas, nesse caso?

Como não há restrição quanto à repetição de dígitos, as possibilidades, para cada uma das quantidades de dígitos consideradas, são dadas por:

$$\begin{aligned} 2 \text{ dígitos} &\rightarrow 10 \cdot 10 = 10^2 = 100; \\ 3 \text{ dígitos} &\rightarrow 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1.000; \\ 4 \text{ dígitos} &\rightarrow 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10.000. \end{aligned}$$

Note que, nos cálculos acima, utilizamos o princípio multiplicativo para cada uma das quantidades de dígitos consideradas.

Mas, para determinarmos a quantidade total de senhas que podem ser geradas, temos que **somar** as quantidades obtidas acima: $100 + 1.000 + 10.000 = 11.100$. Aplicamos aqui o chamado **princípio aditivo**.

De forma geral, esse princípio considera que se tivermos uma quantidade n de conjuntos disjuntos dois a dois (isso significa que, para qualquer par de conjuntos que considerarmos, eles não terão nenhum elemento em comum) com quantidades de elementos iguais, respectivamente, a m_1, m_2, \dots, m_n , a quantidade de elementos da união desses conjuntos é igual a $m_1 + m_2 + \dots + m_n$.

No exemplo que acabamos de resolver, considere que temos 3 conjuntos, A_1, A_2 e A_3 , respectivamente, com 100, 1.000 e 10.000 elementos. Note que não é possível que haja elementos comuns entre tais conjuntos. Então, a quantidade de elementos da união desses conjuntos é dada pela soma $100 + 1.000 + 10.000 = 11.100$.

Podemos enunciar o **princípio aditivo** da seguinte forma:

Considere os conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n dois a dois disjuntos. Se a quantidade de elementos de cada um deles é dada, respectivamente, por m_1, m_2, \dots, m_n , então a quantidade de elementos da união $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ é igual a $m_1 + m_2 + \dots + m_n$.

2.3 Permutação, arranjo e combinação.

A partir do princípio da multiplicação, é possível determinar formas de contagem bastante ágeis e práticas para determinadas situações. Para uma compreensão mais eficiente das técnicas que veremos nesta seção, vamos iniciar propondo três problemas (exemplos 2.7, 2.8 e 2.9) relativamente simples e que podem ser resolvidos sem o conhecimento das técnicas que iremos apresentar. A ideia é apresentar procedimentos que nos levarão ao desenvolvimento de tais técnicas, que chamamos de: **permutação, arranjo e combinação**.

★ EXEMPLO

Exemplo 2.7

Em uma competição de Robótica, apenas três das participantes classificaram-se para a fase final: Lorena, Rafaela e Júlia. De quantas formas diferentes elas poderão ocupar as três primeiras posições da competição?

Podemos começar pensando nas possibilidades para a primeira posição. Há três. Partindo para a segunda posição, teremos apenas duas opções, já que um dos concorrentes ocupa a primeira posição. Dessa forma, para a terceira posição teremos apenas uma opção.

1ª POSIÇÃO	2ª POSIÇÃO	3ª POSIÇÃO	
	$3 \cdot 2 \cdot 1$		= 6 formas diferentes

Se tivéssemos, por exemplo, quatro competidores para ocupar quatro posições, o cálculo que deveria ser feito para determinar a quantidade total de possibilidades seria: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. E não é difícil perceber que, se aumentarmos a quantidade de participantes e, igualmente, a quantidade de posições, o resultado será sempre dado pela multiplicação do número de concorrentes pelos seus antecessores até se chegar ao valor 1 (um).

Generalizando, podemos considerar que a quantidade de formas diferentes que n concorrentes podem ocupar n posições é dada por:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1$$

Esse processo de contagem é denominado permutação de n elementos e denotado por P_n .

É muito comum, nas técnicas de contagem que estamos e estaremos abordando, surgir multiplicações como a que vimos acima. Elas são denominadas **fatoriais**. O **fatorial** de um número n é denotado por $n!$. Podemos escrever:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1$$

Então, na resolução do Exemplo 2.7, podemos considerar que o que houve foi uma permutação de 3 elementos, que indicamos e calculamos como a seguir:

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

De forma geral, uma **permutação de n elementos** é dada por:

$$P_n = n!$$

Veja que não é difícil de determinar o fatorial de um número. Por exemplo,

- $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040$;
- $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$;
- $1! = 1$.

Mas, e quanto ao zero? Qual o valor de $0!$? Por enquanto, apenas considere que

$$0! = 1$$

Pode parecer estranho, mas para que as fórmulas que envolvem contagem de eventos sejam consistentes, é necessário considerar tal valor. Mais adiante, veremos uma razão lógica para essa consideração.

Vamos usar um recurso interessante na resolução de certos problemas para mostrar as possibilidades de arranjos de eventos no estudo de fenômenos. Ele é conhecido por **árvore de possibilidades** ou **diagrama de árvore**. Consiste num esquema gráfico para ilustrar as possibilidades de ocorrência de fenômenos.

A situação apresentada no Exemplo 2.7 pode ser esquematizada da seguinte forma utilizando uma *árvore de possibilidades*:

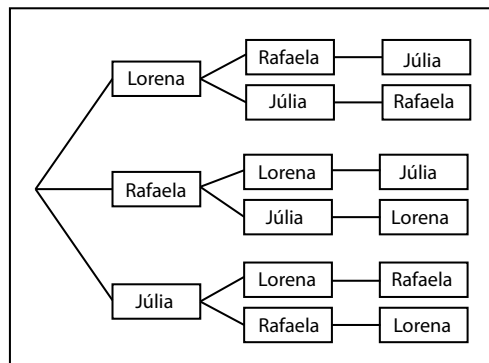


Figura 2.1 – Árvore de possibilidades (diagrama de árvore)

Vamos a mais um exemplo de permutação.

Exemplo 2.8

Um **anagrama** é uma transposição de letras de uma palavra para formar uma nova palavra. Por exemplo, “*Roma*” é um anagrama da palavra “*amor*”. Mas existem outros anagramas desta palavra. Alguns deles são: *mora*, *oram*, *ramo*, *maro* etc.

Para determinar quantos anagramas é possível determinar para a palavra “*amor*”, basta calcular uma permutação de 4 elementos (P_4):

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Não é difícil associar a quantidade total de anagramas de uma palavra composta por n letras diferentes com a permutação de n elementos (P_n), pois, para a primeira posição temos n elementos, para a segunda, $n - 1$, para a terceira $n - 2$, até se chegar a um elemento para a última posição. Portanto, para determinar a quantidade de elementos (pelo princípio multiplicativo), basta calcular o produto:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1$$

que é a expressão que caracteriza uma permutação de n elementos.

Mas como proceder para determinar a quantidade total de anagramas de uma palavra em que há repetição de letras? Vamos ver no exemplo seguinte.

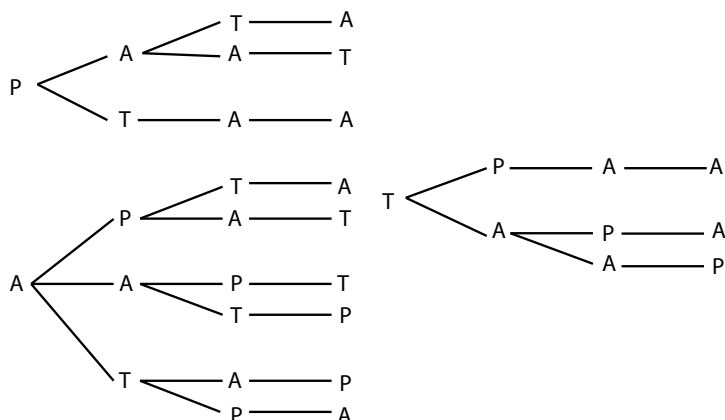
Exemplo 2.9

Quantos anagramas tem a palavra “*pata*”?

Veja a seguir como construir uma árvore de possibilidades para determinar todos os anagramas da palavra “*pata*”. Já devemos eliminar aqueles ramos da árvore que levam a anagramas repetidos.

Sendo assim, para a primeira posição (etapa) há três possibilidades: P, A ou T. Já para a segunda, devemos fazer distinção das letras que podem ser utilizadas dependendo da que foi utilizada na primeira posição. Por exemplo, quando a primeira letra é P, a segunda pode ser A ou T somente. Algo semelhante ocorre quando a primeira letra é T. A segunda pode ser P ou A somente. Mas, se a primeira letra é A, a segunda pode ser P, A ou T, pois há duas letras A na palavra “*pata*”. E dessa forma devemos também considerar para as demais posições.

Vamos, então à árvore de possibilidades para esse exemplo:



Vemos que há 12 anagramas diferentes.

Mas, se procedêsemos de forma semelhante ao Exemplo 2.8, teríamos direcionado a resolução através do cálculo de uma permutação de 4 elementos, o que nos levaria ao resultado 24. O que acontece é que aqui há uma repetição de duas das quatro letras da palavra original.

Podemos resolver casos como esse através do cálculo de permutação, mas considerando que há elementos repetidos. Para tais situações consideramos a definição de permutação com elementos repetidos que é apresentada a seguir.

De forma geral, uma **permutação de n elementos com n_1, n_2, \dots, n_k repetições de elementos** é dada por:

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

No caso do Exemplo 2.9, consideramos uma permutação de 4 elementos com 2 *repetições de elementos*. Portanto:

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 12$$

Na verdade, o que ocorre nesse tipo de situação é que o resultado da permutação de 4 elementos (que resulta em 24 possibilidades), computa duas vezes alguns arranjos repetidos, tais como “*ptaa*” ou “*aapt*”, além de outros. Isso porque a letra “a”, que aparece duas

vezes no anagrama original, é considerada como sendo duas letras distintas. Isso faz com que a quantidade de anagramas seja multiplicada por 2 (que é o valor de $2!$, isto é, o fatorial da quantidade de vezes que a letra “a” se repete). Por isso é que o fatorial de 4 aparece, na fórmula, sendo dividido pelo fatorial de 2.

Como devemos proceder se houver mais letras que se repetem? Veja o próximo exemplo.

Exemplo 2.10

Quantos anagramas possui a palavra “**arraia**”?

Nesse caso, consideramos $n = 6$ e há duas letras que se repetem: o “a”, que aparece três vezes e o “r”, duas. Portanto, temos:

$$P_6^{3,2} = \frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 60 \text{ anagramas}$$

A partir do próximo exemplo, vamos começar a abordar uma situação semelhante à da permutação, mas desejamos determinar a quantidade de sequências diferentes que podemos dispor n elementos tomados p a p , sendo $p < n$.

Exemplo 2.11

Um torneio de handebol organizado pelo centro acadêmico de uma universidade conta com 7 times participantes. De quantas formas diferentes podem ser ocupadas as 3 primeiras posições desse torneio?

Nesse caso, temos o que denominamos **arranjo de 7 elementos tomados 3 a 3**. Há diversas formas de selecionarmos 3 elementos num total de 7. Além disso, considerando os 3 elementos selecionados, há formas diferentes de os dispor.

Vamos considerar algumas das possibilidades (não todas, pois, a quantidade de sequências diferentes é grande!). Representaremos os seis times por A, B, C, D, E, F e G. Uma sequência possível é A em primeiro, B em segundo e C em terceiro. Outra, diferente desta, mas com os mesmos times é B em primeiro, A em segundo e C em terceiro. Cada uma dessas duas possibilidades é denominada um **arranjo**. Nele, a alteração da ordem dos elementos, mesmo que consideremos os mesmos elementos, constitui um novo e distinto **arranjo**.

Mas devemos considerar que além da permutação desses três times (elementos), há outros que podem entrar na seleção de possibilidades. Isso gera uma quantidade de eventos, possíveis, muito maior. E como podemos calcular a quantidade dessas possibilidades?

Poderíamos, simplesmente, utilizar o princípio da multiplicação visto no início deste capítulo. Veja como, a seguir.

Para a primeira posição, temos 7 possibilidades. Se um dos times já ocupa a primeira posição, temos 6 possibilidades para a segunda. De forma análoga, temos 5 possibilidades para a terceira. Portanto, o resultado será obtido fazendo:

$$7 \cdot 5 \cdot 6 = 210,$$

isto é, há 210 formas diferentes desses 7 times ocuparem as 3 primeiras posições.

E se considerarmos, de maneira geral, um total de n times ocupando as p primeiras posições? Como podemos estabelecer uma forma genérica de cálculo?

Note, na resolução do Exemplo 2.11, que podemos obter o resultado fazendo

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

que equivale a:

$$\frac{7!}{4!}$$

No numerador da fração, sempre teremos o total de elementos (n) e, no denominador, o valor será sempre a diferença entre n e p . Observe que 4 é a diferença entre $n = 7$ e $p = 3$.

Portanto, de forma genérica, não é difícil concluir que podemos determinar a quantidade de possibilidades de n elementos ocuparem p posições através da fórmula:

$$\frac{n!}{(n-p)!}$$

Chamamos esse processo de arranjo de **n elementos tomados p a p** e o denotamos por **$A_{n,p}$** . Portanto,

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Vamos a mais um exemplo de arranjo.

Exemplo 2.12

O sistema contábil de uma empresa gera, para cada pedido faturado, um código em que os 3 primeiros dígitos são formados por letras, sem repetição, e os 4 últimos são formados

por dígitos numéricos, também sem repetição, entre os algarismos 0, 1, 2, 3 e 4. Quantos códigos diferentes podem ser gerados por esse sistema?

Vamos considerar, a princípio, duas sequências: uma literal com 3 posições e outra numérica com 4 posições. Note que, para cada uma das sequências, podemos determinar a quantidade total e possibilidades utilizando a fórmula do arranjo, pois a alteração de posição determina uma nova sequência (isso nem sempre acontece, como veremos mais adiante).

Para a sequência literal, temos um total de 26 letras que podem ocupar 3 posições, isto é, temos um arranjo de 26 elementos tomados 3 a 3 ($n = 26$ e $p = 3$):

$$A_{26,3} = \frac{26!}{(26-3)!} = \frac{26!}{23!}$$

Aqui, vale uma observação importante que irá lhe ajudar em cálculos envolvendo fatoriais. As calculadoras científicas possuem a função fatorial, geralmente representada por $n!$ ou $x!$. O problema é que, mesmo utilizando calculadora, o cálculo de $26!$ nos levará a um número tão grande que a quantidade de dígitos do visor da calculadora não será suficiente para exibi-lo de forma exata. Faça o teste! Dependendo da capacidade da calculadora, o resultado aparecerá na forma:

$$4,032915 \cdot 10^{26}.$$

É um resultado aproximado e não exato. Se o desenvolvermos, chegaremos a:

$$403.291.500.000.000.000.000.000.000.$$

O resultado exato é:

$$403.291.461.126.605.635.584.000.000.$$

Situação semelhante ocorrerá se você quiser determinar o valor de $23!$.

E como podemos lidar com esse tipo de problema? Embora a calculadora não exiba o resultado exato, ele fica armazenado em sua memória. Basta você utilizar o valor armazenado ao invés de digitar o valor aproximado. Mas, há uma forma simples de evitar valores tão grandes. Efetue o **cancelamento entre fatoriais**. Apenas tome o cuidado de não cancelar fatoriais que não sejam exatamente iguais. No caso do arranjo que queremos calcular para chegar a um dos resultados requeridos no problema apresentado no Exemplo 2.12, faça da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 A_{26,3} &= \frac{26!}{(26-3)!} \\
 &= \frac{26!}{23!} \\
 &= \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23!}{23!} \\
 &= 26 \cdot 25 \cdot 24 \\
 &= 15.600.
 \end{aligned}$$

Há, portanto, 15.600 formas diferentes de dispor os três primeiros dígitos da senha (os dígitos formados por letras diferentes).

Com relação às quatro últimas posições, temos 5 dígitos numéricos diferentes que podem ocupá-las. Para determinar a quantidade de possibilidades, basta calcularmos o valor de um arranjo de 5 elementos tomados 4 a 4, como detalhado a seguir.

$$\begin{aligned}
 A_{5,4} &= \frac{5!}{(5-4)!} \\
 &= \frac{5!}{1!} \\
 &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\
 &= 120.
 \end{aligned}$$

Temos, portanto, 120 formas diferentes de dispor os dígitos numéricos dos códigos gerados.

Pelo princípio multiplicativo, podemos chegar ao valor total de códigos possíveis através do produto

$$15.600 \cdot 120 = 1.872.000.$$



CURIOSIDADE

Já mencionamos que $0! = 1$. Mas, por quê?

O fatorial é uma invenção humana que foi criada para auxiliar os processos de contagem, como já vimos alguns. Um deles é a permutação. Outro é o arranjo. Qual é a diferença entre eles? Na permutação, consideramos a contagem de todas as sequências ordenadas em que podemos dispor n termos. A diferença em relação ao arranjo é que neste consideramos todas as sequências de p termos que podemos formar com n termos, em que $p \leq n$.

Se calcularmos o valor de um arranjo em que o número p de termos da sequência for igual ao número total n de elementos do conjunto que estamos considerando, teremos uma permutação de n elementos, isto é,

$$A_{n,n} = P_n.$$

Note, que se considerarmos num arranjo, $p = n$, podemos escrevê-lo na forma:

$$A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!}$$

Então, como , vamos igualar as expressões que fornecem essas quantidades:

$$A_{n,n} = P_n \Rightarrow \frac{n!}{0!} = n!$$

Finalmente, para que $\frac{n!}{0!} = n!$, devemos considerar que $0! = 1$.

Veremos, no próximo exemplo, uma situação em que a ordem dos elementos selecionados não importa, isto é, não determina uma nova sequência.

★ EXEMPLO

Exemplo 2.13

Em uma loteria, são sorteados 4 números de 1 a 30. O apostador, ao efetuar o jogo, deve escolher apenas 4 números e, para ganhar o prêmio principal, deve acertar todos eles. Quantos jogos diferentes podem ser feitos nesta loteria?

Distintivamente do que aconteceu nos exemplos anteriores, em que a alteração de posição dos elementos de uma sequência gerava uma nova sequência, aqui a ordem de disposição dos elementos é indiferente. Numa loteria, não importa a ordem de sorteio dos números (ou a ordem de escolha no momento de fazer a aposta). O que define um jogo (ou aposta) é o conjunto de números escolhidos.

Se calcularmos o valor do arranjo de 30 elementos tomados 4 a 4 ($A_{30,4}$), chegaremos ao resultado 657.720. No entanto, para cada 4 termos selecionados, temos 24 formas diferentes de dispor tais elementos. Se dividirmos 657.720 por 24, portanto, chegaremos ao resultado que desejamos, que é 27.405 apostas diferentes.

Nesses casos, podemos utilizar o cálculo do arranjo de n elementos tomados p a p e dividi-lo pelo valor do fatorial de p (como acabamos de fazer na resolução do Exemplo 2.13). Essa divisão nos leva a uma nova fórmula que é da combinação de **n elementos tomados p a p** :

$$\frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Chamamos esse processo de **combinação de n elementos tomados p a p** e o denotamos por $C_{n,p}$. Portanto,

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Aplicando esta fórmula aos valores do Exemplo 2.13, temos:

$$\begin{aligned} C_{30,4} &= \frac{30!}{4!(30-4)!} \\ &= \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 26!} \\ &= \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 27.405 \end{aligned}$$



CONEXÃO

Veja, no endereço <<http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1005>>, um experimento que faz uma abordagem diferenciada de um problema de análise combinatória, sob o título “*De quantas maneiras posso passar meu cadarço?*”

Exemplo 2.14

No Campeonato Brasileiro de Futebol, dos 20 participantes de cada edição, os 5 primeiros colocados garantem vaga para a Copa Libertadores. Quantos conjuntos diferentes de classificados para essa copa podem ser definidos?

Nesse caso (assim como no anterior), não importa a ordem dos 5 primeiros times. Um conjunto é definido pelos elementos (times) classificados e não pela ordem que ocupam. Se são classificados os times A, B, C, D e E, nessa ordem, será definida uma nova sequência somente se, pelo menos um dos times for substituído por outro (fora dessa lista). Se a classi-

ficação dos quatro primeiros for alterada, por exemplo, para B, A, D, E e C, a combinação é a mesma que a anterior, isto é, não foi definido um novo conjunto. Trata-se, portanto de uma **combinação**.

Dessa forma, o resultado pode ser obtido por:

$$\begin{aligned}C_{20,5} &= \frac{20!}{5!(20-5)!} \\&= \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 15!} \\&= \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\&= 15.504\end{aligned}$$

Há, portanto, 15.504 formas diferentes de definir os cinco classificados para a Copa Libertadores.



CONEXÃO

Você pode calcular facilmente permutações, arranjos e combinações no Excel.

Para determinar o valor de uma permutação de n elementos (P), digite, na célula:

`"=PERMUT(n;n)"`.

No caso de um arranjo de n elementos tomados p a p , digite:

`"=PERMUT(n;p)"`.

Note que o arranjo é, na verdade, uma permutação em que o número de elementos é maior do que o número de posições.

Finalmente, para calcular uma combinação de n elementos tomados p a p , digite:

`"=COMBIN(n;p)"`.



ATIVIDADES

01. Um sistema computacional possui 5 unidades de entrada/saída e 4 processadores. Qualquer uma das unidades de entrada/saída pode ser conectada a qualquer um dos processadores. De quantas formas diferentes podem ser feitas tais conexões?

02. O segredo de um cofre é composto por três números de 1 a 25, sendo que o mesmo número não pode ser utilizado em sequência. Ele pode, por exemplo, ocupar a primeira e a terceira posições, mas não a primeira e a segunda ou a segunda e a terceira. Dessa forma, quantos segredos possui esse cofre?

03. Quantos pontos, no mínimo, devem ser marcados aleatoriamente em um quadrado de lado 6 de tal forma que pelo menos 2 estejam a uma distância máxima igual a $\sqrt{2}$?

04. (UEL) Um professor de matemática comprou dois livros para premiar dois alunos de uma classe de 42 alunos. Como são dois livros diferentes, de quantos modos distintos pode ocorrer a premiação?

- a) 861
- b) 1.722
- c) 1.764
- d) 3.444
- e) 242

05. A Mega-Sena é uma loteria que paga milhões de reais para o acertador dos 6 números sorteados. Há prêmios menores para quem acerta 4 ou 5 números. O apostador deve marcar de 6 a 15 números, entre os 60 disponíveis no volante. Um jogo é chamado de simples quando o apostador escolhe apenas 6 números.

Alessandra fez um jogo simples. Qual é a probabilidade de que ela:

- a) ganhe o prêmio principal?
- b) consiga acertar 4 ou 5 números?

06. O sistema de emplacamento de veículos no Brasil considera uma sequência de 3 letras seguida de outra de 4 algarismos numéricos. Sem considerar nenhum tipo de restrição quanto à sequência formada, quantas placas diferentes podem ser obtidas nesse sistema?

07. Em uma escola, há 12 professores de Física e 16 de Matemática. Uma comissão de seis membros deve ser formada com esses professores e a única condição que se impõe é, pelo menos um dos membros, seja professor de Matemática. Sendo assim, quantas comissões diferentes podem ser formadas?

08. (FUVEST) Em uma certa comunidade, dois homens sempre se cumprimentam (na chegada) com um aperto de mão e se despedem (na saída) com outro aperto de mão. Um homem e uma mulher se cumprimentam com um aperto de mão, mas se despedem com um aceno. Duas mulheres só trocam acenos, tanto para se cumprimentarem quanto para se despedirem.

Em uma comemoração, na qual 37 pessoas almoçaram juntas, todos se cumprimentaram e se despediram na forma descrita acima. Quantos dos presentes eram mulheres, sabendo que foram trocados 720 apertos de mão?

- a) 16 c) 18 e) 20
b) 17 d) 19

09. (UFF) Niterói é uma excelente opção para quem gosta de fazer turismo ecológico. Segundo dados da prefeitura, a cidade possui oito pontos turísticos dessa natureza. Um certo hotel da região oferece de brinde a cada hóspede a possibilidade de escolher três dos oito pontos turísticos ecológicos para visitar durante sua estada. O número de modos diferentes com que um hóspede pode escolher, aleatoriamente, três destes locais, independentemente da ordem escolhida, é:

- a) 8 c) 56 e) 336
b) 24 d) 112

10. (FUVEST) Considere todas as trinta e duas sequências, com cinco elementos cada uma, que podem ser formadas com os algarismos 0 e 1. Quantas dessas sequências possuem pelo menos três zeros em posições consecutivas?

- a) 3 c) 8 e) 16
b) 5 d) 12



REFLEXÃO

Um dos tópicos mais primitivos da Matemática é o que se refere aos processos de contagem. Contar é básico e fundamental. A ciência matemática teve sua origem graças à necessidade do homem em contar. Apesar de utilizarmos princípios simples para realizar contagens, em algumas situações, como vimos, as coisas não são tão fáceis assim. Há diversos problemas que envolvem contagem que exigem uma análise mais cuidadosa para escolher o processo correto de contagem.

Seja na área em que atuamos profissionalmente ou em nossa vida particular, há diversas situações em que necessitamos ter um mínimo de conhecimento dos processos de contagem. Um exemplo é você conhecer suas reais chances quando faz uma aposta em uma loteria (se é que você costuma fazer isso). E, neste capítulo, você pôde conhecer alguns dos principais procedimentos que facilitam a determinação de possibilidades de ocorrências de eventos.

Procure comparar os procedimentos vistos para avaliar melhor quando cada um deles deve ser utilizado. Bons estudos!



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARRETO, Márcio. **Trama matemática**: princípios e novas práticas no ensino médio. 1ª Ed. Campinas, SP: Papirus, 2013.

DEMANA, F. D.; WAITS, B. K.; FOLEY, G. D.; KENNEDY, D. **Pré-cálculo**. 7ª edição. São Paulo: Pearson, 2009.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A.; DEGENSAJN, D.; PERIGO, R. **Matemática**. Vol. Único. Editora Atual, 2006.

LEITE, Álvaro Emílio; CASTANHEIRA, Nelson Pereira. **Teoria dos números e teoria dos conjuntos**. 1ª Ed. Curitiba: InterSaberes, 2014.

SÉRATES, J. **Raciocínio lógico**: lógico matemático, lógico quantitativo, lógico numérico, lógico analítico, lógico crítico. 8ª ed. Brasília: Jonofon Ltda, 1998.

3

Relações

3. Relações

Várias das aplicações da Matemática em nosso cotidiano referem-se a situações em que relacionamos duas ou mais variáveis. O valor da compra do supermercado que relaciona-se com a quantidade de itens que compramos, o quanto pagamos mensalmente à empresa fornecedora de água que depende da quantidade consumida, o imposto de renda que pagamos que está relacionado diretamente aos nossos ganhos, o IPTU que tem relação com a área construída do imóvel, e tantos outros exemplos.

Na maior parte das aplicações matemáticas envolvendo relação, consideramos apenas duas variáveis (ou elementos de dois conjuntos que relacionam-se entre si). No entanto, na prática, tais relações costumam envolver mais do que, simplesmente, elementos de dois conjuntos.

Considere, por exemplo, um estudo sobre a demanda (ou procura) de certo produto. Um dos principais fatores que têm relação com a demanda é o preço do produto. Esse tipo de relação é tão importante para economistas e administradores que, geralmente, é estudada em pormenores em algumas disciplinas dos cursos de formação desses profissionais. Mas, embora o estudo desse tipo de relação é realizado considerando somente essas duas variáveis, é preciso considerar (e os especialistas consideram isso) que a demanda é afetada por mais fatores, isto é, ela relaciona-se com outras variáveis. Taxa de juros, prazo de financiamento, cotação do dólar entre outras variáveis, também interferem na variação da demanda de um produto.

A Estatística, por exemplo, dispõe de métodos eficientes para estudar a relação entre variáveis, na prática. Alguns deles fornecem informações que nos permitem selecionar os fatores (variáveis) que têm uma relação mais consistente com a variável de estudo (como a demanda que citamos acima).

Mas, o que nos interessa, no momento, é estudar a forma como elementos de dois conjuntos se relacionam, ou como ocorre a relação entre duas variáveis. Isto é fundamental para compreender e descrever outros conceitos como funções, classes de equivalência e conjuntos ordenados.



OBJETIVOS

- Compreender o conceito de relação e suas propriedades;
- Testar propriedades em uma relação binária;
- Reconhecer ordens parciais e construir diagramas;
- Representar relações graficamente.

3.1 Produto cartesiano e pares ordenados

Uma forma de relação entre elementos de dois conjuntos é denominada **produto cartesiano**. Ele é, na verdade, a relação entre todos os elementos desses dois conjuntos. Considere dois conjuntos A e B . O produto cartesiano $A \cdot B$, nessa ordem, é formado por todas as possibilidades de associação entre elementos desses dois conjuntos.

Uma das formas de representar uma relação é utilizando **pares ordenados**. Precisamos mostrar quem se relaciona com quem. Denotando por x os elementos de A e por y os elementos de B , o **produto cartesiano** $A \cdot B$ é composto por todos os pares ordenados (x, y) tais que $x \in A$ e $y \in B$. É comum, nas aplicações, considerar que A e B sejam o mesmo conjunto.

Vamos a um exemplo para compreender melhor o que é um produto cartesiano entre dois conjuntos.



EXEMPLO

Exemplo 3.1

Sejam os conjuntos $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{c, d, e, f\}$. O produto cartesiano $A \cdot B$ é o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y) tais que $x \in A$ e $y \in B$. Portanto, podemos defini-lo como:

$$A \cdot B = \{(a, c), (a, d), (a, e), (a, f), (b, c), (b, d), (b, e), (b, f), (c, c), (c, d), (c, e), (c, f)\}.$$

Vale aqui uma observação: a ordem em que os elementos do conjunto $A \cdot B$ foram dispostos acima pode ser alterada sem que se obtenha um novo conjunto. Se alterarmos a ordem dos elementos (a, c) e (a, d) , por exemplo, escrevendo (a, d) e (a, c) , não alteramos o produto cartesiano. Mas, num par ordenado, a alteração da ordem dos elementos determina um novo elemento. Um exemplo: o par ordenado (a, c) é diferente de (c, a) .

Podemos também representar o produto cartesiano utilizando a notação algébrica de conjunto, como a seguir:

$$A \cdot B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

No caso do produto cartesiano do exemplo que acabamos de ver, podemos escrever:

$$A \cdot B = \{(x, y) \mid x \in \{a, b, c\}, y \in \{c, d, e, f\}\}$$

Quando o produto cartesiano refere-se a conjuntos numéricos, podemos representá-lo graficamente. Vamos ver como nos exemplos a seguir.

Exemplo 3.2

Considere os conjuntos $A = \{-1, 0, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$. O produto cartesiano $A \cdot B$ é o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y) tais que $x \in A$ e $y \in B$. Portanto, podemos defini-lo como:

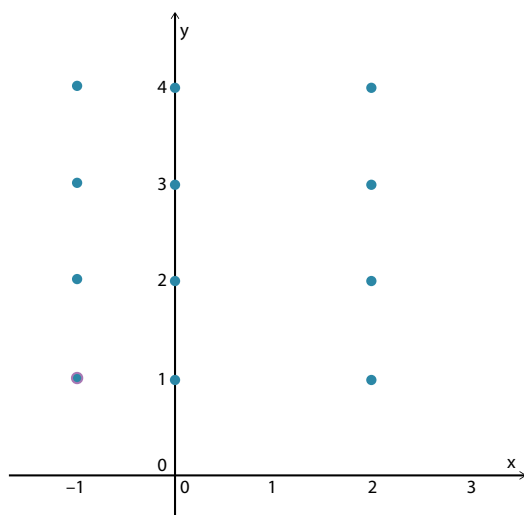
$$A \cdot B = \{(-1, 1), (-1, 2), (-1, 3), (-1, 4), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}.$$

ou

$$A \cdot B = \{(x, y) \mid x \in \{-1, 0, 2\}, y \in \{1, 2, 3, 4\}\}$$

Cada um dos elementos do conjunto acima pode ser representado como um ponto do que chamamos **plano cartesiano**. Os valores de x estão dispostos no eixo horizontal, conhecido como **eixo x** ou **eixo das abscissas**. Já os valores de y são localizados no eixo vertical, conhecido como **eixo y** ou **eixo das ordenadas**.

Veja a representação gráfica do produto cartesiano desse exemplo na figura seguinte.

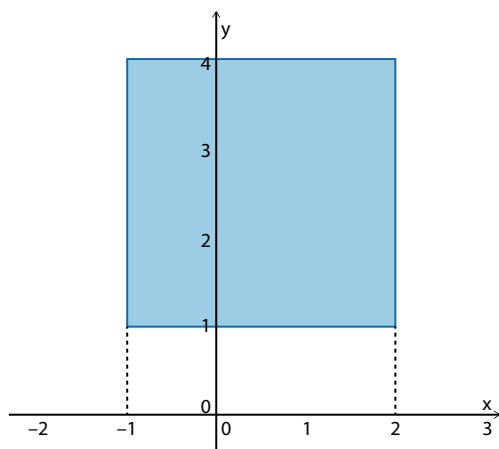


Exemplo 3.3

Agora, vamos considerar subconjuntos dos números reais. Sejam $A = [-1, 2]$ e $B = [1, 4]$. Nesse caso, não há como representar o produto cartesiano $A \cdot B$ enumerando seus elementos, pois é um conjunto infinito. Algebricamente, podemos representá-lo como:

$$A \cdot B = \{(x, y) \mid x \in [-1, 2], y \in [1, 4]\}$$

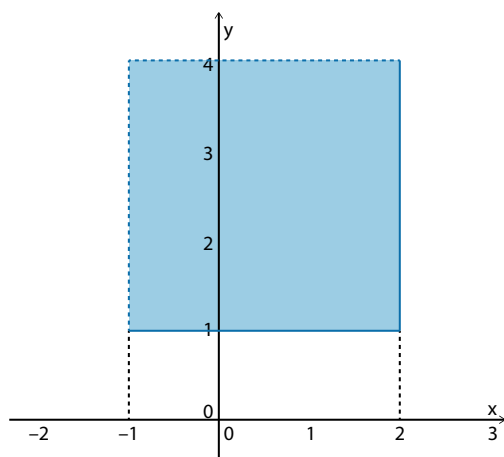
Nesse caso, a representação gráfica mostrará uma região do plano cartesiano e não apenas alguns pontos. Temos, na verdade, a representação de uma infinidade de pontos. Veja.



As linhas que definem a região mostrada no gráfico também “participam” do produto cartesiano $A \cdot B$. Isto quer dizer que os pontos sobre tais linhas são também elementos desse produto cartesiano. Mas, como proceder graficamente quando a região é delimitada por, pelo menos, uma linha que não participa do produto cartesiano? Veremos no próximo exemplo.

Exemplo 3.4

Considere os conjuntos $A =]-1, 2]$ e $B = [1, 4[$. A diferença em relação ao exemplo anterior é que estamos tirando do conjunto A o elemento “-1” e do conjunto B o elemento “4”. Nesse caso, a representação gráfica pode ser feita como a seguir.



Note que utilizamos linhas tracejadas para indicar os limites da região que queremos e, ao mesmo tempo, mostrar que os pontos sobre tais linhas não fazem parte do produto cartesiano (da região do gráfico que o representa).

3.2 Relações binárias. Propriedades e fechos

Uma relação entre dois conjuntos não vazios quaisquer A e B (ou **relação binária** entre A e B) é um **subconjunto do produto cartesiano $A \cdot B$** . Como todo conjunto pode ser considerado um subconjunto dele próprio, então, concluímos que todo produto cartesiano de quaisquer dois conjuntos pode ser visto como uma relação entre estes conjuntos.

Podemos utilizar as seguintes (entre outras) notações para indicar uma relação R entre dois conjuntos A e B , sendo $x \in A$ e $y \in B$:

- $xRy : x \sim y$ (o sinal “ \sim ” aqui, na indicação de relação será substituído por sinais matemáticos, tais como, “ $>$ ”, “ $<$ ”, “ $=$ ”, etc, ou por uma propriedade que define a relação, tal como “divide”, “é divisor” ou “é múltiplo” entre outras.

- $\forall x \in A, \forall y \in B$ (“propriedade que define a relação entre x e y ”, $(x, y) \in R$)
- $(x, y) \mid$ “propriedade que define a relação entre x e y ”, $(x, y) \in R$
- $R = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$

Nos exemplos seguintes, veremos alguns exemplos de relações.



EXEMPLO

Exemplo 3.5

Vamos retomar o produto cartesiano entre os conjuntos A e B apresentados no Exemplo 3.2. Lembre-se que $A = \{-1, 0, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Vamos definir uma relação, que denotaremos por R , como:

$$x R y: x \geq y$$

A “lei” que define tal relação diz que, do produto cartesiano $A \cdot B$, consideraremos apenas aqueles pares ordenados (x, y) tais que $x \geq y$, isto é, aqueles em que a primeira coordenada é maior ou igual a segunda. Portanto, podemos escrever:

$$x R y = \{(2, 1), (2, 2)\}$$

As relações, geralmente, são definidas como sentenças matemáticas (como acabamos de ver).

Em uma relação R de A em B , o conjunto dos valores $x \in A$ que estão associados a valores $y \in B$ é denominado **domínio da relação** e denotamos por **$D(R)$** . E os valores y que estão associados a valores x compõem o conjunto que denominamos **imagem da relação** e denotamos por **$Im(R)$** . O conjunto B , que contém a imagem da relação é denominado **contradomínio da relação** e é denotado por **$CD(R)$** .

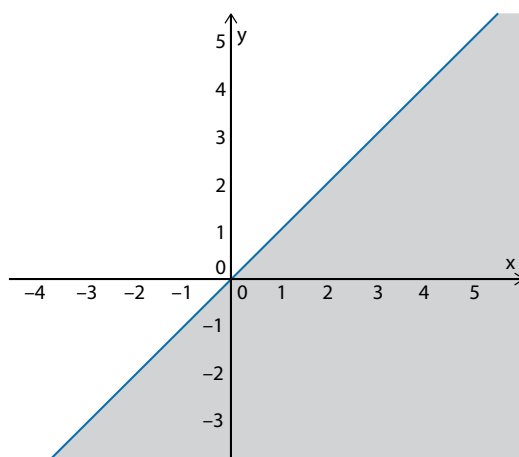
No caso desse exemplo, temos $D(R) = \{2\}$, $Im(R) = \{1, 2\}$ e $CD(R) = B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Vamos a mais exemplos.

Exemplo 3.6

Agora, vamos considerar a mesma sentença do exemplo anterior ($x R y: x \geq y$), mas considerando $A = B = R$. Nesse caso o produto cartesiano $A \cdot B$ (ou $R \cdot R$) é todo o plano xy . Mas, de acordo com a sentença dada, a relação R será representada pela parte desse plano que compreende todos os pontos (x, y) em que a primeira coordenada é menor ou igual a segunda.

A representação gráfica dessa relação você vê na figura a seguir.



Observe que qualquer ponto que você considerar na região destacada, na figura, sua localização se dá através de um par ordenado em que a abscissa (x) é maior que a ordenada (y) ou, no mínimo, ela é igual. A reta que passa pela origem do sistema (que é a bissetriz dos eixos) determina exatamente os pontos em que $x = y$.

Com relação ao domínio e a imagem dessa relação, temos $D(R) = R$ e $Im(R) = R$, pois, tanto x como y podem assumir quaisquer valores reais.

Exemplo 3.7

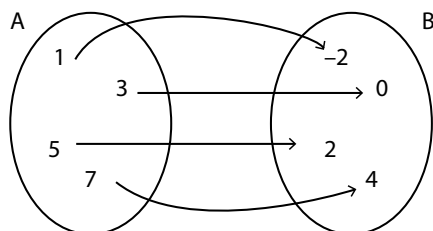
Considere os conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ e a relação R definida por $x R y: y = x - 3$.

Uma das formas de representar essa relação (além da que já foi mostrada no enunciado deste exemplo) é enumerando seus elementos, como a seguir:

$$x R y = \{(1, -2), (3, 0), (5, 2), (7, 4)\}.$$

Nesse caso, temos $D(R) = \{1, 3, 5, 7\}$ e $Im(R) = \{-2, 0, 2, 4\}$.

Vamos aproveitar este exemplo para mostrar outro tipo de representação gráfica de relações binárias, que é o de **diagramas** (como vimos no estudo de conjuntos do Capítulo 1), utilizando flechas que indicam os elementos que se relacionam e o “sentido” da relação.

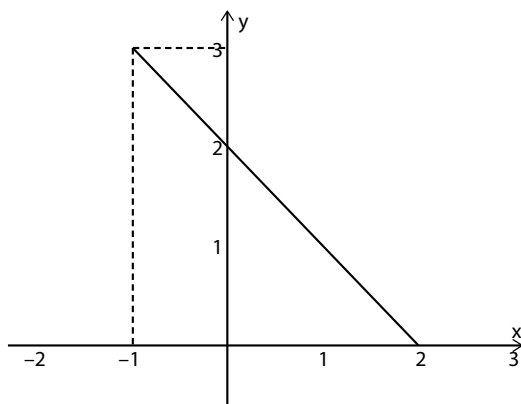


Mais adiante, veremos outro tipo de representação gráfica para casos em que domínio e contradomínio são conjuntos iguais.

Exemplo 3.8

Agora, considere $A = [-1, 2]$ e $B = [0, 3[$ e a relação $x R y$ tal que $y + x = 2$, com $x \in A$ e $y \in B$.

Nesse caso, a relação é composta por infinitos pontos (pares ordenados), todos eles alinhados. Nesse caso, a representação gráfica da relação é um segmento de reta. A representação gráfica é mostrada a seguir.



3.2.1 Propriedades das relações

As relações podem ser agrupadas de acordo com certas propriedades, que veremos nesta seção. Nas definições dessas propriedades, que serão mostradas a seguir, considere uma relação R em um conjunto não vazio A . Lembre-se que quando definimos uma relação indicando apenas um conjunto é porque os conjuntos de onde provêm os valores de x e de y são iguais.

3.2.1.1 Propriedade reflexiva

Uma relação R no conjunto não vazio A é considerada **reflexiva** se, para todo $x \in A$, conseguimos encontrar $x R x$, isto é, todo valor x relaciona-se com si próprio.

Outra forma de defini-la é:

$$\text{"R é reflexiva se } \forall x \in A, (x, x) \in R \text{"}$$

Podemos “ler” essa sentença da seguinte maneira: “A relação R é **reflexiva** se para todo (ou qualquer que seja) o elemento x do conjunto A , o par ordenado (x, x) é um elemento dessa relação”. Esse tipo de notação é comumente utilizada nas definições que envolvem conjuntos e no estudo de Lógica Matemática, que veremos a partir do capítulo 5 deste livro.



EXEMPLO

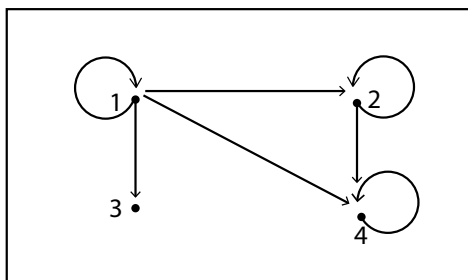
Exemplo 3.9

Considere a relação R definida em $A = \{1, 2, 3, 4\}$ tal que “ x divide y ”. Essa relação pode ser escrita como:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (4, 4)\}.$$

Observe que para qualquer valor de $x \in A$, é possível encontrar em R um par ordenado na forma (x, x) , ou seja, um par ordenado tal que a abscissa divide a ordenada. Concluimos, então, que R é **reflexiva**.

Vamos aproveitar este exemplo para mostrar como podemos representar uma relação R em um conjunto A utilizando o **diagrama de flechas**.



Exemplo 3.10

Agora, considere a mesma relação do exemplo anterior, mas com $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Nesse caso, encontramos um valor para x tal que ele não divide a si próprio. Esse valor é o zero. Portanto, a relação R , nesse caso, **não é reflexiva**.

3.2.1.2 Propriedade simétrica

Uma relação R no conjunto não vazio A é considerada simétrica se, quaisquer que sejam $x \in A$ e $y \in A$ tais que $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$. Em outras palavras, a simetria ocorre numa relação se para todo par ordenado (x, y) tivermos também o par ordenado (y, x) .

Outra forma de defini-la é:

$$\text{"R é simétrica se } \forall x, y \in A, ((x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R) \text{"}$$

A leitura dessa sentença pode ser feita na forma: "A relação R é simétrica quando, para quaisquer elementos x e y do conjunto A , se o par ordenado (x, y) é um elemento dessa relação, então o par ordenado (y, x) também o será".



EXEMPLO

Exemplo 3.11

Vamos considerar a relação $R = \{(a, b) \mid a + b = 5\}$ definida em \mathbb{Z} (conjunto dos números inteiros).

Essa relação é um conjunto com infinitos elementos. Mas, note que, em todos eles, se invertemos a ordem das abscissas e ordenadas em qualquer par ordenado que defina R teremos outro elemento dessa relação. Por exemplo, se considerarmos o elemento $(1, 4)$ que satisfaz a relação proposta, pois $1 + 4 = 5$, seu simétrico, o ponto $(4, 1)$ também é tal que satisfaz a condição $a + b = 5$.

Portanto, essa relação é considerada **simétrica**.

Exemplo 3.12

Considere as relações binárias:

- $R_1 = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 3), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$;
- $R_2 = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ e
- $R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

Quais são reflexivas e quais são simétricas?

A relação R_1 é reflexiva, pois para todos os valores que x assume (que são 0, 1, 2 e 3), podemos encontrar, na relação, o par ordenado (x, x) : $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$. Ela também é simétrica, pois, para todo par ordenado (x, y) a ela pertencente, podemos encontrar o par ordenado (y, x) .

A relação R_2 também é reflexiva e simétrica. Veja que para todos os valores que x assume (0, 1, 2 e 3), conseguimos encontrar o par ordenado (x, x) . Além disso, para todo par ordenado na forma (x, y) há um par ordenado (y, x) , pois todos eles são formados por coordenadas iguais, isto é, $x = y$.

Já a relação R_3 é reflexiva, mas não é simétrica, pois para o par ordenado $(2, 3)$ não conseguimos encontrar o seu simétrico, que é $(3, 2)$.

3.2.1.3 Propriedade antissimétrica

Uma relação R no conjunto não vazio A é dita **antissimétrica** quando, para todos os elementos x e y do conjunto A , se os pares ordenados (x, y) e (y, x) pertencem à R , então concluímos que $x = y$. Na forma simbólica, podemos escrever:

“R é antissimétrica se $\forall x, y \in A \left((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \rightarrow (x = y) \right)$ ”

Em outras palavras, podemos considerar que uma relação possui a propriedade antissimétrica quando não há, nela, pares ordenados com coordenadas opostas, isto é, se há um par ordenado na forma (x, y) , com x e y distintos, então não há (y, x) .

Vale ressaltar que a simetria e a antissimetria não são propriedades opostas. Vamos a dois exemplos.



EXEMPLO

Exemplo 3.13

Considere a relação $R = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$. Note que essa relação apresenta a propriedade simétrica, pois para todo par ordenado (x, y) , temos também o par ordenado (y, x) . E essa simetria somente ocorre quando $x = y$, o que comprova que a relação R é também antissimétrica. Isso mostra, portanto, que tais propriedades não se opõem necessariamente.

Exemplo 3.14

Considere o conjunto $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e a relação R :

Temos, portanto, $R = \{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 2), (3, 2), (3, 3)\}$.

Observe que só temos termos simétricos em que $x = y$. Então, concluímos que essa relação é antissimétrica.

Exemplo 3.15

A relação $R = \{(1, 1), (2, 2), (1, 3), (3, 1)\}$ não é antissimétrica, pois, o simétrico de $(1, 3)$ é $(3, 1)$ e, nesse caso, $x \neq y$.

3.2.1.4 Propriedade transitiva

Uma relação R no conjunto não vazio A é **transitiva** nos casos em que, quando x, y e z são elementos do conjunto A , se (x, y) e (y, z) são elementos dessa relação, então (x, z) também o é. Simbolicamente, podemos escrever:

$$\forall x, y, z \in A ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \rightarrow (x, z) \in R$$



EXEMPLO

Exemplo 3.16

Considere a relação $R = \{(a, a), (a, c), (c, b), (a, b)\}$ no conjunto $A = \{a, b, c\}$. Note que ela pode ser considerada transitiva, pois temos:

- $(a, a) \in R \wedge (a, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R$;
- $(a, c) \in R \wedge (c, b) \in R \rightarrow (a, b) \in R$.

Exemplo 3.17

Seja R a relação " $>$ " no conjunto $A = \{0, 1, 2, 3\}$. Quais propriedades ela apresenta?

Podemos enumerar os elementos dessa relação: $R = \{(1, 0), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1), (3, 2)\}$.

Essa relação não é reflexiva, pois não há nenhum elemento na forma (x, x) .

Também não é simétrica, pois, por exemplo, temos $(1, 0)$, mas não temos o seu simétrico $(0, 1)$.

A propriedade antissimétrica verifica-se, pois ela diz que se houver termos simétricos (x, y) e (y, x) , então x e y devem ser iguais. Como não há termos simétricos na relação, então não podemos dizer que essa propriedade não se verifica. Portanto, consideramos a relação R antissimétrica.

Quanto à transitividade, note que sempre que (x, y) e (y, z) pertencem à relação, então (x, z) também pertence. Portanto, R é transitiva. As possibilidades que temos para analisar são apresentadas abaixo:

- $(2, 1) \in R \wedge (1, 0) \in R \rightarrow (2, 0) \in R$;
- $(3, 1) \in R \wedge (1, 0) \in R \rightarrow (3, 0) \in R$;
- $(3, 2) \in R \wedge (2, 0) \in R \rightarrow (3, 0) \in R$;
- $(3, 2) \in R \wedge (2, 1) \in R \rightarrow (3, 1) \in R$.

Outra forma de concluir sobre a transitividade, sem ter que enumerar todas as possibilidades, é considerar que se no par ordenado (x, y) , temos $x > y$ e, no par ordenado (y, z) , temos $y > z$, então $x > z$. Isso nos leva a deduzir, portanto, que o par ordenado (x, z) também pertence à relação R .

Outra definição associada ao estudo das relações, que iremos ver agora, é a de fecho ou fechamento de uma relação.

Considere uma relação R em um conjunto A . Dizemos que uma relação R^* , também em A , é um **fecho de R em relação a uma propriedade P** (que pode ser reflexiva, simétrica ou transitiva) se forem observadas as três condições seguintes:

- 1) R^* tem a propriedade P .
- 2) $R \subseteq R^*$ (R é um subconjunto próprio de R^* , isto é, R está contida em R^* , mas não é igual a R).
- 3) R^* é um subconjunto de qualquer outra relação em A que inclui R e tem a propriedade P (isso significa que R^* é a "menor" relação possível com tais características).

Dependendo da propriedade que se está considerando na determinação do fecho de uma relação R , podemos denominá-lo:

FECHO REFLEXIVO	Que é uma relação reflexiva que contém R e é a menor relação possível;
FECHO SIMÉTRICO	Que é uma relação simétrica que contém R e é a menor relação possível;
FECHO TRANSITIVO	Que é uma relação transitiva que contém R e é a menor relação possível.

Para compreender melhor como podemos determinar o fecho de uma relação, vamos a alguns exemplos.

Exemplo 3.18

Vamos considerar a relação $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$ em $A = \{1, 2, 3\}$.

Para obter o **fecho reflexivo** de R , devemos pensar nos pares ordenados que faltam nessa relação, para que se verifique a propriedade reflexiva. Observe que a união de R com o conjunto $\{(2, 2), (3, 3)\}$ é uma relação transitiva tal que $R \subseteq (R \cup \{(2, 2), (3, 3)\})$. Portanto, o fecho reflexivo de R é $R^* = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 2), (3, 3)\}$.

Quanto ao **fecho simétrico** de R , precisamos buscar os pares ordenados que faltam à relação para que se observe a propriedade simétrica. Se unirmos a relação R com o conjunto $\{(2,3)\}$, chegaremos ao fecho desejado, que é $R^* = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$.

O **fecho transitivo** pode ser obtido através da determinação dos pares ordenados que são necessários para que a relação obtida seja transitiva. Observe que, para isso, é necessária a inclusão, na nova relação, dos pares $(2, 2)$ e $(3, 1)$. Portanto, o fecho transitivo de R é $R^* = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$.

Exemplo 3.19

Considere, agora, a relação $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, c)\}$ sobre $A = \{a, b, c\}$. Vamos, então, determinar os fechos reflexivo, simétrico e transitivo.

O fecho reflexivo é dado por $R \cup \{(b, b)\} = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, c)\}$.

O fecho simétrico é $R \cup \{(b, a), (c, b)\} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (c, c)\}$.

Finalmente, o fecho transitivo é $R \cup \{(a, c)\} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, c), (c, c)\}$.

Exemplo 3.20

Seja $R = \{(a, b) \mid a > b\}$ uma relação definida sobre o conjunto dos números inteiros (\mathbb{Z}).

Observe que essa relação satisfaz a propriedade transitiva. Nesse caso, o seu fecho transitivo é ela própria.

Com relação à propriedade reflexiva, seu fecho é $R \cup \{(a, a) \mid a \in \mathbb{Z}\} = \{(a, b) \mid a \geq b\}$.

O fecho simétrico de R é $R \cup \{(a, b) \mid a < b\} = \{(a, b) \mid a \neq b\}$.

3.3 Ordens parciais e relações de equivalência

Nesta seção, para finalizar, veremos mais duas definições importantes no que diz respeito ao estudo das relações. Definiremos o que é uma **ordem parcial** (e total) em um conjunto e quando uma relação pode ser considerada uma **relação de equivalência** em um conjunto.

Começaremos com a definição de **ordem parcial**.

Uma **ordem parcial** de um conjunto não vazio A é qualquer relação R em A que seja **reflexiva**, **antissimétrica** e **transitiva**.

Os exemplos a seguir mostram como determinar se uma relação R pode ser considerada ou não uma **ordem parcial** de um conjunto A .



EXEMPLO

Exemplo 3.21

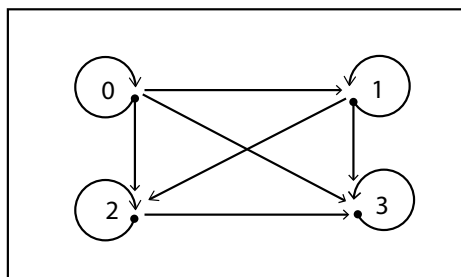
Seja R a relação em $A = \{0, 1, 2, 3\}$ tal que $x R y : x \leq y$. Podemos, então, escrever:

$$R = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}.$$

Esta é uma relação reflexiva, pois para todo $x \in A$, temos $(x, x) \in R$. É também antissimétrica, pois, para qualquer par ordenado (x, y) que considerarmos, não existe (y, x) . A propriedade transitiva também se verifica, pois sempre que x relaciona-se com y e este relaciona-se com z , vemos que x relaciona-se com z . Um exemplo em que isso acontece é com os pares ordenados $(0, 1)$, $(1, 3)$ e $(0, 3)$, nessa ordem. Fica a seu critério verificar todas as outras possibilidades de transitividade.

Como a relação R é reflexiva, antissimétrica e transitiva em relação ao conjunto A , então dizemos que ela é uma **ordem parcial** em A .

A seguir você vê a representação da relação R deste exemplo através do **diagrama de flechas**.



Quando temos uma ordem parcial em um conjunto finito A , podemos também utilizar outra forma de representação gráfica que é denominada **diagrama de Hasse**. Nele, cada elemento do conjunto A é representado por um ponto, que denominamos **nó** ou **vértice**. Se x é um predecessor imediato de y , o vértice (ou nó) que representa y é colocado acima do vértice que representa x , fazendo-se a conexão entre esses dois vértices com um segmento de reta.

Veja, a seguir, o **diagrama de Hasse** para a relação R no conjunto A , do exemplo 3.21.



O termo **parcial** é utilizado pelo fato de nem sempre termos, no conjunto em questão, uma relação entre todos os seus elementos. Isso pode ser visto no exemplo seguinte (3.22). Na relação que acabamos de ver ($x \leq y$) é possível perceber que há uma relação entre todos os elementos do conjunto A . Então, podemos dizer que a relação R em A , nesse caso, é uma **ordem total**. No **diagrama de Hasse** é possível detectar isso no fato de não haver nós ou vértices no mesmo nível (o que indicaria que os elementos representados por esses nós não se relacionam).

No exemplo a seguir, em que é apresentada uma ordem parcial, atente para a diferença na disposição dos nós do diagrama.

Exemplo 3.22

Considere a relação $R = \{(x, y) \mid x \text{ divide } y\}$ no conjunto $A = \{1, 2, 3, 6, 12\}$. A expressão “ x divide y ” pode ser escrita simbolicamente como “ $x \mid y$ ”.

Podemos escrever a relação R em A como

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 6), (1, 12), (2, 2), (2, 6), (2, 12), (3, 3), (3, 6), (3, 12), (6, 6), (6, 12), (12, 12)\}$$

Observe que essa relação é reflexiva, pois todo valor inteiro positivo x divide a si mesmo. É só observar os elementos $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(6, 6)$ e $(12, 12)$.

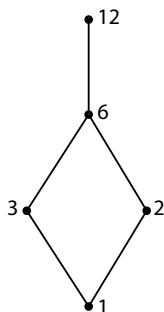
Ela também é antissimétrica, pois se x divide y , y somente divide x quando $x = y$.

Com relação à transitividade, podemos verificar que sempre que x divide y e este divide z , então x divide z . Alguns casos em que isso ocorre são:

- $(1, 2) \in R \wedge (2, 6) \in R \rightarrow (1, 6) \in R$;
- $(1, 3) \in R \wedge (3, 12) \in R \rightarrow (1, 12) \in R$;
- $(2, 6) \in R \wedge (6, 12) \in R \rightarrow (2, 12) \in R$.

A relação R é, portanto, transitiva. Sendo assim, R pode ser considerada uma **ordem parcial** em A . Aqui, não podemos considerar uma ordem total (ou A não é um conjunto totalmente ordenado com relação a R), pois nem todos os elementos estão relacionados. Note que os elementos 2 e 3 não se relacionam.

Nesse caso, o **diagrama de Hasse** tem a forma:



A presença, no diagrama, de dois nós (ou vértices) no mesmo nível indica que a ordem é parcial e não total.

Exemplo 3.23

Considere a relação $R = \{(x, y) \mid x \text{ divide } y\}$ no conjunto \mathbb{N}^* (conjunto dos números naturais não nulos ou conjunto dos números inteiros positivos).

A relação R , aqui, é a mesma do exemplo anterior, mas estendida ao conjunto infinito dos números naturais positivos.

Podemos ver que, neste caso, ela também é reflexiva, pois todo valor inteiro positivo x divide a si mesmo. Também é antissimétrica, pois se x divide y , y somente divide x quando $x = y$. Quanto à transitividade, também verificamos que sempre que x divide y e este divide z , então x divide z . Um exemplo disso é quando consideramos que 2 divide 6 e este divide 18. Então, 2 divide 18. A relação R é, portanto, transitiva.

Logo, R é uma **ordem parcial** em \mathbb{N}^* .

Exemplo 3.24

A relação “maior que” no conjunto dos números inteiros (\mathbb{Z}) não é uma ordem parcial nesse conjunto (e em nenhum outro), pois esta não é uma relação reflexiva (apesar de ser antissimétrica e transitiva). Note que para todo x inteiro não existe (x, x) .

A seguir, veja a definição de **relação de equivalência**.

Uma relação R em um conjunto A é considerada uma **relação de equivalência** se ela for **reflexiva**, **simétrica** e **transitiva** em A .

Definir se uma relação R é ou não uma **relação de equivalência** em um conjunto A , nada mais é do que verificar se essa relação apresenta, em relação ao conjunto citado, três das propriedades que estudamos: reflexiva, simétrica e transitiva.

Exemplo 3.25

Considere o conjunto finito

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

e a relação

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$$

definida sobre A .

Não é difícil perceber que R é uma relação reflexiva, pois para todo $x \in A$, temos $(x, x) \in R$. Isso pode ser percebido pela presença dos pares ordenados $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$ e $(4, 4)$ na relação.

A simetria também está presente para todos os termos da relação. Além dos pares ordenados com coordenadas iguais, temos: $(1, 2)$ e $(2, 1)$; $(3, 4)$ e $(4, 3)$.

Quanto à transitividade, note que sempre que se observa as relações $x R y$ e $y R z$, temos também a relação $x R z$.

Portanto, R é uma relação de equivalência em A .

CONEXÃO

Veja mais exemplos de relações de equivalência no endereço: http://www.inf.ufsc.br/~mauro/ine5403/slides_novos/zpdfs_ppts/p53relequivs.pdf.

Exemplo 3.26

Considere a relação R sobre o conjunto dos números reais (\mathbb{R}) tal que $a R b$ se, e somente se, $a - b$ é um número inteiro. Isso significa que participam da relação àqueles pares ordenados em que os elementos são números reais e a diferença entre eles é um número inteiro.

Vamos verificar se R é uma relação de equivalência sobre R .

Como " $a - a = 0$ " para todo $a \in R$ e " 0 " é um número inteiro, então concluímos que R é uma relação reflexiva em R .

Se " $a - b$ " é um número inteiro para $a, b \in R$, então podemos concluir que " $b - a$ " também resulta em um número inteiro (que corresponde ao oposto do resultado de " $a - b$ "). Isso significa que se " $a R b$ ", então " $b R a$ ". Portanto, a relação R é também simétrica em R .

Quanto a transitividade, considere que se " $a - b$ " e " $b - c$ " resultam em números inteiros, então " $a - c$ " também resulta. Isso corresponde a afirmar que se $a R b$ e $b R c$, então $a R c$, o que indica que R é uma relação reflexiva (como queremos mostrar). Mas como podemos mostrar que " $a - c$ " é um número inteiro também?

Comece somando a expressão " $b - b$ " à expressão " $a - c$ ". Isso é o mesmo que somar zero à expressão " $a - c$ ", isto é, a expressão não se altera. Veja:

$$a - c = (a - c) + (b - b)$$

Agora, reagrupando os termos, podemos continuar a desenvolver a expressão como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} a - c &= (a - c) + (b - b) \\ &= (a - b) + (b - c). \end{aligned}$$

Como " $a - b$ " e " $b - c$ " são números inteiros, então a soma deles também é um inteiro. Sendo assim, está provado que " $a - c$ " é um número inteiro. Logo, está provado que a relação R é transitiva.

Portanto, R é uma **relação de equivalência**, pois é reflexiva, simétrica e transitiva em R .



ATIVIDADES

01. Para cada um dos pares de conjuntos A e B apresentados, construa o gráfico que representa o produto cartesiano $A \cdot B$:

- a) $A = \{-2, -1, 0, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$;
- b) $A = [-1, 3]$ e $B = [2, 4]$;
- c) $A = [1, +\infty[$ e $B = [0, 3[$;
- d) $A = \{x \in R / -2 < x \leq 5\}$ e $B = \{y \in R / 0 \leq x < 2\}$

02. Dados os conjuntos $A = \{0,1,2,3,4,5\}$ e $B = \{-6,-5,-4,-3,-2,-1,0\}$ e a relação $R = \{(x,y) \mid x+y=0, x \in A, y \in B\}$,

- a) represente graficamente a relação R;
- b) indique o domínio e a imagem de R.

03. Dados os conjuntos $S = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $T = \{1, 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50\}$ e a relação $R = \{(x,y) \in S \times T \mid y = x^2 + 1\}$,

- a) determine todos os elementos da relação R;
- b) represente a relação R utilizando o diagrama de flechas;
- c) indique o domínio, o contradomínio e a imagem de R.

04. Considere a relação " $x R y : x > y + 1$ " sobre o conjunto dos números reais.

- a) Represente-a no plano cartesiano.
- b) Verifique quais propriedades ela satisfaz (reflexiva, simétrica, antissimétrica, transitiva).
- c) Ela pode ser considerada uma ordem parcial sobre o conjunto dos números reais? Justifique.
- d) Ela é uma relação de equivalência sobre Image? Justifique.

05. Considere a relação " $x R y : x + y$ é par" sobre o conjunto dos números naturais.

- a) Verifique quais propriedades ela satisfaz (reflexiva, simétrica, antissimétrica, transitiva).
- b) Ela pode ser considerada uma ordem parcial sobre o conjunto dos números reais? Justifique.
- c) Ela é uma relação de equivalência sobre R? Justifique.

06. Dada a relação " $x R y \mid x$ é múltiplo de y " sobre o conjunto $A = \{0, 1, 2, 3\}$, determine os fechos reflexivo, simétrico e transitivo de R em relação a A.

07. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ o conjunto sobre o qual tem-se a relação R tal que " $x R y : x - y$ é múltiplo de 2".

- a) Obtenha todos os elementos da relação R.
 - b) Indique quais propriedades a relação R satisfaz.
-



REFLEXÃO

Neste capítulo, estudamos alguns tipos de relações entre conjuntos, numéricos ou não. Vimos também algumas propriedades dessas relações e o que elas significam. Se alguma definição, conceito ou propriedade não lhe pareceu clara ou você ainda não conseguiu compreender de forma adequada, sugiro que estude-o ou estude-a com mais calma, retomando os exemplos, procurando resolver todas as atividades para que você não encontre maiores dificuldades nos assuntos que ainda serão trabalhados neste livro.

No próximo capítulo, estudaremos as funções, que são relações entre conjuntos e que “obedecem” certas condições. Daí, a compreensão dos assuntos deste capítulo que estamos finalizando torna-se ainda mais importante para que você não se depare com maiores dificuldades no estudo dos assuntos do capítulo 4. Até lá!



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARRETO, Márcio. **Trama matemática**: princípios e novas práticas no ensino médio. 1ª Ed. Campinas, SP: Papirus, 2013.

DEMANA, F. D.; WAITS, B. K.; FOLEY, G. D.; KENNEDY, D. **Pré-cálculo**. 7ª edição. São Paulo: Pearson, 2009.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A.; DEGENSAJN, D.; PERIGO, R. **Matemática**. Vol. Único. Editora Atual, 2006.

LEITE, Álvaro Emílio; CASTANHEIRA, Nelson Pereira. **Teoria dos números e teoria dos conjuntos**. 1ª Ed. Curitiba: InterSaberes, 2014.

SÉRATES, J. **Raciocínio lógico**: lógico matemático, lógico quantitativo, lógico numérico, lógico analítico, lógico crítico. 8ª ed. Brasília: Jonofofon Ltda, 1998.

4

Funções

4. Funções

Olhe bem à sua volta e procure observar, com atenção, muitos dos acontecimentos que o cercam. Você certamente se dará conta de que, em diversos deles, há grandezas que se relacionam matematicamente, como a velocidade de um automóvel, que varia de acordo com o tempo, ou o desempenho de certo aluno em uma prova, que pode variar de acordo com o tempo que ele dedicou-se aos estudos; ou, ainda, a demanda (procura) de um produto que, dentre outros fatores, relaciona-se com o seu preço. Há diversas outras situações em que podemos observar a variação de certa grandeza em função de outra. Essas grandezas, aqui, chamaremos de **variáveis**.

O estudo dessas relações não ocorre apenas em uma área específica, mas em todas elas, praticamente. O mais interessante é que podemos descrever tais relações através de fórmulas matemáticas. Algumas dessas relações já estudamos no capítulo 3. Mas, há tipos específicos de relações que denominamos **funções**. E elas têm uma variedade e um alcance impressionantes com relação às suas aplicações práticas.

Modelar o que acontece na prática com certas variáveis através da aplicação de funções é uma das mais importantes contribuições da Matemática tanto ao desenvolvimento tecnológico, como ao estudo social e comportamental. Tais aplicações são incontáveis e, neste capítulo, veremos a definição de função, suas propriedades e estudaremos alguns tipos específicos de funções: função do primeiro grau, função do segundo grau e outras funções polinomiais. E, é claro, veremos muitas aplicações.

Da mesma forma como já feito em capítulos anteriores, todos os conteúdos serão acompanhados de exemplos e de aplicações práticas.



OBJETIVOS

- Compreender o que é uma função matemática;
- Aplicar o conceito de função para gerar funções compostas e inversas;
- Efetuar operações envolvendo funções;
- Reconhecer tipos diferentes de funções e suas características;
- Realizar cálculos de valores de funções e determinar suas raízes;
- Esboçar e interpretar gráficos de funções;
- Aplicar o conhecimento sobre funções em situações práticas do cotidiano.

4.1 Definição

Mesmo que não percebamos, estamos envolvidos por diversos tipos de funções em nosso cotidiano. Considere, por exemplo, a relação existente entre o consumo de água em nossa casa e o valor que iremos pagar, o tempo que o computador leva para realizar certa tarefa e a quantidade de cálculos que devem ser realizados, a quantidade de itens comprados e o valor a ser pago, entre tantas outras situações em que há a relação entre duas (ou mais) grandezas. Chamaremos essas grandezas de **variáveis**.

Há que se destacar que, na prática, não é comum que duas variáveis se relacionem de forma exclusiva, sem a interferência de outras. Considere, por exemplo, uma relação entre variáveis que é bem conhecida e já foi citada anteriormente: a relação entre a demanda (procura) de um produto e o seu preço. Sabemos que o preço é um fator que, geralmente, configura-se como o principal ou um dos principais fatores determinantes da procura pelo produto. Mas, por mais que estabeleçamos uma relação matemática entre tais variáveis (demanda e preço), sempre haverá outras variáveis que, certamente, afetarão o valor da demanda.

Isso, no entanto, não diminui a importância da aplicação de funções nesses tipos de relações. A prática mostra que as funções são ferramentas fundamentais para tomadas de decisões mais eficientes e com menor risco de erro.

Veremos agora, a definição formal de função.

Considere dois conjuntos A e B . Dizemos que f é uma função de A em B (escrevemos $f : A \rightarrow B$) se, para todo elemento $x \in A$, há um único elemento $y \in B$.

As variáveis x e y que se relacionam em uma função f são denominadas, respectivamente **variável independente** e **variável dependente**.

Nos exemplos a seguir são analisadas algumas relações entre conjuntos para verificar se são ou não funções.



EXEMPLO

Exemplo 4.1

Considere os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{-1, 1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ e a relação $x R y : y = 2x - 1$, com $x \in A$ e $y \in B$. Podemos escrever $R = \{(0, -1), (1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$.

Observe que **todos os elementos do conjunto A estão relacionados a elementos do conjunto B**. Além disso, **cada elemento de A está associado a um único elemento de B**. Portanto, estão satisfeitas as condições descritas acima para que consideremos essa relação uma função de A em B.

Podemos denotá-la na forma $f : A \rightarrow B$.

Uma forma comum para indicar uma função é escrevê-la como uma $f(x)$ (lê-se: f de x ou uma função de x). É comum tanto utilizar esta notação como também utilizar y (ou outra letra qualquer) no lugar de $f(x)$. A expressão $f(x)$ também pode ser substituída por outras formas como $g(x)$, $v(t)$, $C(q)$ etc. E podemos indicar a relação entre cada par de termos na forma:

$$R = \{(x, y) \mid x + y = 0, x \in A, y \in B\}$$

$$R = \{(x, y) \in S \times T \mid y = x^2 + 1\}$$

$$f(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1 \Rightarrow f(0) = -1$$

$$f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \Rightarrow f(1) = 1$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3 \Rightarrow f(2) = 3$$

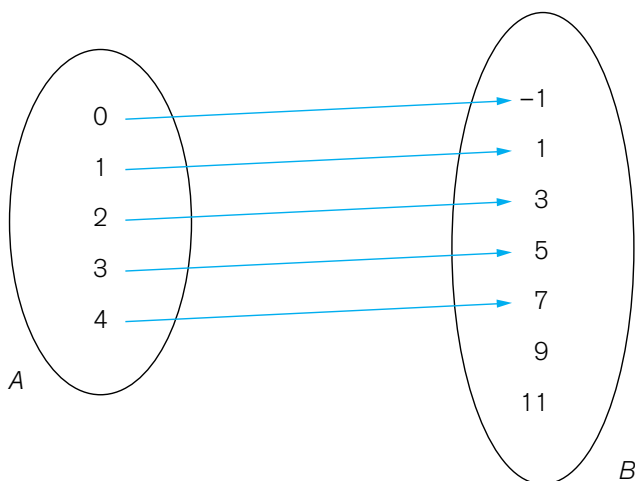
Geralmente, conforme a aplicação que se está fazendo, são escolhidas as letras que irão representar as variáveis que se relacionam. Por exemplo, no estudo da velocidade em relação ao tempo é usual indicar a função na forma $v(t)$. Quando a relação é entre custo de produção de uma certa utilidade e a quantidade produzida, costuma-se utilizar a notação $C(q)$. Independentemente das letras utilizadas, o que importa é reconhecê-las como variáveis de uma função.

O conjunto A que contém os valores x é denominado **domínio da função f** (esta definição é a mesma que vimos no capítulo anterior no estudo das relações). A notação que utilizamos, nesse caso, é $D(f) = A$ ou $D(f) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. O **contradomínio da função f** é o conjunto B. Denotamos $CD(f) = B$ ou $CD(f) = \{-1, 1, 3, 5, 7, 9, 11\}$. Os elementos do conjunto B que estão associados a elementos de A constituem a **imagem da função f**. Nesse exemplo, temos, portanto, $Im(f) = \{-1, 1, 3, 5, 7\}$.

O termo “**imagem**”, no estudo de funções, tanto pode ser utilizado para se referir ao conjunto de elementos do contradomínio que estão associados a elementos do domínio como também para indicar individualmente essa relação. Nesse exemplo, podemos dizer que:

- “-1” é imagem de “0”, pois $f(0) = -1$;
- “1” é imagem de “1”, pois $f(1) = 1$;
- “3” é imagem de “2”, pois $f(2) = 3$;
- “5” é imagem de “3”, pois $f(3) = 5$;
- “7” é imagem de “4”, pois $f(4) = 7$;

Vamos representar a função deste exemplo utilizando diagramas. Essa não é a forma mais usual de representação, como veremos no decorrer deste capítulo. As representações gráficas de funções são feitas, geralmente, no plano cartesiano. Mas, a representação por diagramas (quando dos conjuntos que se relacionam são finitos) são úteis para que você entenda melhor quando uma relação é ou não uma função. Veja a seguir.



As condições para que uma relação entre A e B seja também uma função entre tais conjuntos pode ser verificada através do diagrama de flechas acima da seguinte forma: o conjunto das variáveis independentes x , que aqui é o conjunto A , deve ter flechas saindo de **todos** os seus elementos e **nenhum** deles pode ter **mais do que uma** flecha. Ou seja, todos os elementos do conjunto A devem estar associados a elementos (y) do conjunto B e cada um deles (x) deve estar associado a um único elemento y de B . Já os elementos do conjunto B não precisam estar todos associados a elementos de A e qualquer um pode estar associado a mais do que um elemento x de A (receber mais do que uma flecha).

Observe, no diagrama, que de cada um dos (todos os) elementos de A (0, 1, 2, 3 e 4) sai uma única flecha. Já os elementos de B podem não receber nenhuma, como é o caso dos números 9 e 11. Pelo diagrama podemos, também, detectar de forma rápida o domínio, a imagem e o contradomínio da função. O domínio é o conjunto de onde saem as flechas (nele incluem-se todos os elementos do conjunto) e o contradomínio é o conjunto aonde chegam as flechas (nele incluem-se todos os elementos do conjunto, inclusive aqueles que não estão associados a nenhum elemento do domínio). Já a imagem é composta apenas por aqueles elementos do contradomínio que “recebem” flechas, isto é, aqueles que estão associados a elementos do domínio.

Veja, no próximo exemplo, mais um caso de função com representação por diagramas.

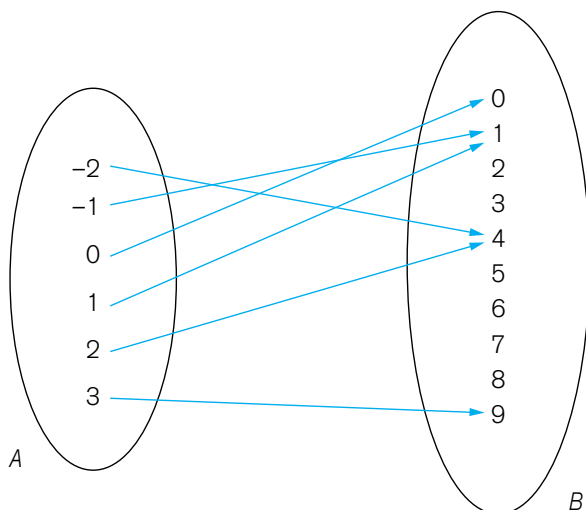
Exemplo 4.2

Considere os conjuntos $A = \{-1, -2, 0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ relacionados pela fórmula (“lei”) $y = x^2$, com $x \in A$ e $y \in B$.

Por se tratar de dois conjuntos finitos, podemos enumerar os elementos da relação entre ambos:

$$R = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)\}.$$

Veja, abaixo, a representação dessa relação na forma de diagramas.



Observe que, aqui também, **todos os elementos do conjunto A estão relacionados a elementos do conjunto B**. Além disso, **cada elemento de A está associado a um único elemento de B**. Portanto, estão satisfeitas as condições descritas acima para que consideremos essa relação uma **função de A em B** e representá-la, portanto, na forma $f : A \rightarrow B$. Mas, há elementos do conjunto B (contradomínio) que estão associados, cada um deles, a dois elementos do domínio A. Isso não impede que a relação seja considerada uma função, pois são os elementos do domínio que devem estar associados a apenas um elemento do contradomínio (e não o contrário).

Para esta função, temos:

- $D(f) = A = \{-1, -2, 0, 1, 2, 3\}$;
- $CD(f) = B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
- $Im(f) = \{0, 1, 4, 9\}$.

No próximo exemplo, vamos definir uma relação que não é função.

Exemplo 4.3

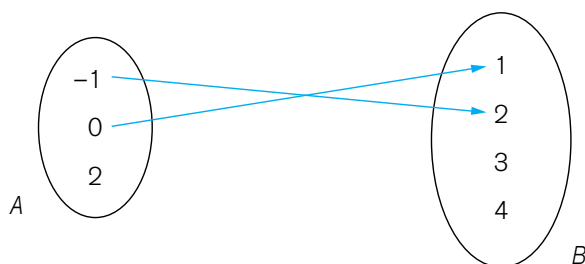
Vamos considerar a relação $y = x^2 = 1$ definida nos conjuntos $A = \{-1, 0, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$ com $x \in A$ e $y \in B$.

Como podemos escrever a relação $y = f(x) = x^2 + 1$, então, nesse caso, temos:

- $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$, isto é, a imagem de “-1” é “2”;
- $f(0) = 0^2 + 1 = 1$, isto é, a imagem de “0” é “1”;
- $f(2) = 2^2 + 1 = 5$, mas este valor não é um elemento do contradomínio.

Portanto, **f não é uma função de A em B** (mas pode ser considerada uma relação de A em B).

Na representação por diagramas, podemos ver que não se trata de uma função pelo fato de ter um elemento do domínio (conjunto A) que não tem nenhum valor associado no contradomínio (conjunto B). Veja:



Veja outro exemplo de relação que não é função, mas, agora, por não cumprir a outra condição da definição de função.

Exemplo 4.4

Considere a relação de $A = \{0, 1, 4\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ com $x \in A$ e $y \in B$.

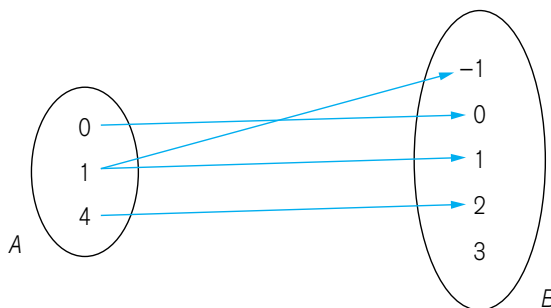
Para isolar a variável dependente y , podemos escrever:

$$y^2 = x \Rightarrow y = \pm\sqrt{x} \text{ ou } y = f(x) = \pm\sqrt{x}$$

Daí, temos:

- $f(0) = \pm\sqrt{0} = 0$, isto é, a imagem de “0” é “0”;
- $f(1) = \pm\sqrt{1} = \pm 1$, isto é, as imagens de “1” são “-1” e “1”;
- $f(4) = \pm\sqrt{4} = \pm 2$, o que nos leva a concluir que a imagem de “4” é apenas o “2”, pois o “-2” não pertence ao contradomínio.

Antes de tirarmos qualquer conclusão quanto ao fato de f ser ou não uma função de A em B , vamos analisar o diagrama de flechas dessa relação.



Note que o elemento “1” do domínio está associado a dois elementos do contradomínio. Embora, nos cálculos, vimos que algo semelhante ocorre com o elemento “4” do domínio, ele está associado a apenas um elemento do contradomínio (que é o “2”), pois o outro elemento com o qual ele se relacionaria (que é o “-2”) não está presente no contradomínio da relação.

Então, podemos concluir que **f não é uma função de A em B** justamente por existir um (ou pelo menos um) elemento que está associado a dois elementos do contradomínio. No diagrama, podemos chegar a essa conclusão sempre que observarmos duas (ou mais flechas) saindo de um mesmo elemento do domínio da relação.

A partir de agora, iremos nos focar apenas nas relações que são funções.

4.2 Funções sobrejetoras, injetoras e bijetoras

Na seção anterior definimos quando uma relação entre dois conjuntos A e B pode ser considerada uma função de A em B ($f: A \rightarrow B$). A definição baseia-se no tipo de relação que há entre elementos desses dois conjuntos. Lembre-se que a relação só é uma função quando todos os elementos do conjunto A (que é o domínio da função) estão relacionados a elementos de B (contradomínio) e cada uma dessas relações deve ser única, isto é, cada elemento de A pode relacionar-se com apenas um elemento de B.

Quanto aos elementos do contradomínio (B) não há essa preocupação, pois cada um deles pode estar associado a um único elemento do domínio (A), a mais do que um ou a nenhum. No entanto, quando todos os elementos do contradomínio estão associados a elementos do domínio e/ou quando cada um está associado a um único elemento do domínio, a função pode ser classificada em **injetora**, **sobrejetora** ou **bijetora**.

Utilizaremos os próximos exemplos para mostrar como realizar este tipo de classificação.



EXEMPLO

Exemplo 4.5

Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 1, 2\}$, considere a função $f: A \rightarrow B$, tal que $f(x) = |x - 1|$. Temos, portanto:

$$f(-1) = |-1 - 1| = |-2| = 2$$

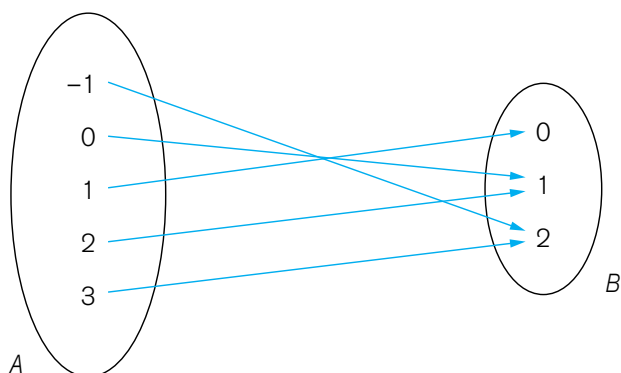
$$f(0) = |0 - 1| = |-1| = 1$$

$$f(1) = |1 - 1| = |0| = 0$$

$$f(2) = |2 - 1| = |1| = 1$$

$$f(3) = |3 - 1| = |2| = 2$$

Observe que **todos** os elementos do contradomínio B estão associados a **pelo menos um** elemento do domínio A. Então, podemos classificar essa função como **sobrejetora**. Veja também sua representação através de diagramas a seguir.



Uma característica da representação por diagramas de funções sobrejetoras é que podemos observar que todos os elementos do contradomínio “recebem” flechas, não importando se algum deles tem mais do que uma associação.

De forma geral, uma função f de A em B é denominada **sobrejetora** (ou **sobrejetiva**) quando todo elemento do conjunto B é imagem de pelo menos um elemento do conjunto A .

A definição acima também pode ser escrita na forma:

Uma função f de A em B é denominada **sobrejetora** quando sua imagem é igual ao seu contradomínio, isto é, $\text{Im}(f) = \text{CD}(f)$.

Exemplo 4.6

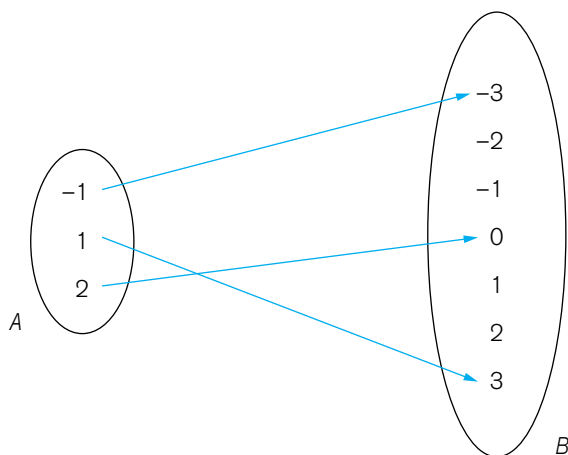
Dados os conjuntos $A = \{-1, 1, 2\}$ e $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, considere a função $f : A \rightarrow B$, tal que $f(x) = \frac{4}{x} - x$. Temos, portanto:

$$f(-1) = \frac{4}{-1} - (-1) = -3$$

$$f(1) = \frac{4}{1} - 1 = 3$$

$$f(2) = \frac{4}{2} - 2 = 0$$

Utilizando a representação por diagramas, temos: -3



Note que os elementos “-3”, “0” e “3”, que constituem a imagem da função f , têm, cada um, apenas um elemento associado do domínio de f . Quando isso acontece, dizemos que a função é **injetora**.

De forma geral, uma função f de A em B é denominada **injetora** (ou **injetiva**) quando cada elemento da sua imagem tem uma única associação com elemento do domínio.

A definição acima também pode ser escrita na forma:

Uma função f de A em B é denominada **injetora** se para quaisquer dos elementos distintos de seu domínio correspondem dois elementos distintos de sua imagem.

Você pode ainda considerar que se para uma função $f(x)$ ser classificada como injetora deve ocorrer que se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Exemplo 4.7

Dados os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-3, -1, 1, 3, 5\}$, considere a função $f: A \rightarrow B$, tal que $f(x) = 1 + 2x$. Temos, portanto:

$$f(-2) = 1 + 2(-2) = -3$$

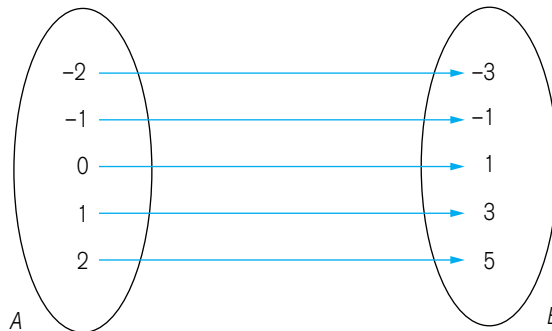
$$f(-1) = 1 + 2(-1) = -1$$

$$f(0) = 1 + 2 \cdot 0 = 1$$

$$f(1) = 1 + 2 \cdot 1 = 3$$

$$f(2) = 1 + 2 \cdot 2 = 5$$

Abaixo, a função f representada na forma de diagramas.



Observe que **todos** os elementos do contradomínio B estão associados a **apenas um** elemento do domínio A. Então, podemos classificá-la tanto como **injetora** como **sobrejetora**. Nesse caso, dizemos que a função é **bijetora**.

De forma geral, uma função f de A em B é denominada **bijetora** quando todo elemento do conjunto B é imagem de um único elemento do conjunto A.

A definição acima também pode ser escrita na forma:

Uma função f de A em B é denominada **bijetora** quando é **injetora** e **sobrejetora** simultaneamente.

Os exemplos até agora, em sua maioria, consideravam relações ou funções entre conjuntos com quantidades finitas de elementos para facilitar a compreensão das definições, conceitos e procedimentos que foram abordados. Contudo, na maior parte das aplicações que fazemos de todo esse conteúdo, os conjuntos que se relacionam são infinitos. Geralmente,

o conjunto sobre o qual definimos uma função (ou relação) é o conjunto dos números reais ou algum subconjunto seu.

Portanto, a partir de agora, priorizaremos o uso de exemplos com conjuntos reais. Mas como podemos classificar funções desse tipo? Veremos na seção 5 deste capítulo.

4.3 Função inversa

Geralmente, numa função, expressamos a variável dependente y em relação à variável independente x . Temos, portanto $y = f(x)$. Para qualquer valor que atribuímos a x , conseguimos determinar o valor de y . Mas, será que não podemos fazer o contrário? Expressar x como função de y . Vamos ver um exemplo prático disso.



EXEMPLO

Exemplo 4.8

Uma aplicação clássica de função em Economia refere-se à relação entre a demanda de (ou procura por) um produto e o seu preço. Aqui, tanto podemos expressar a demanda em relação ao preço, como o preço em relação à demanda. Ou seja, a demanda, ora pode ser a variável dependente, ora a variável independente. O mesmo vale para o preço.

Considere, por exemplo, a demanda y de certo produto dada por:

$$y = 50 - 2x$$

em que x é o preço unitário deste produto.

Da forma como está escrita, costumamos dizer que y é uma função de x ou y é a variável dependente e x , a variável independente.

Para qualquer valor que atribuímos a x , conseguimos, facilmente, calcular y . Esta é uma forma útil para analisar como a demanda se comporta em relação à variação do preço.

Mas, se quisermos analisar a variação do preço em relação à demanda, qual é a forma mais adequada de relacionar tais variáveis?

Podemos, na função dada, isolar a variável x . Veja:

$$x = \frac{50 - y}{2} \text{ ou } x = 25 - 0,5y$$

As funções $y = 50 - 2x$ e $x = \frac{y-50}{2}$ são denominadas **funções inversas**. Note que para qualquer par (x, y) que pertence à primeira, temos que o par (y, x) pertence à segunda. Considere, por exemplo, o par ordenado $(10, 30)$ que pertence à primeira função e constate que o par ordenado $(30, 10)$ pertence à segunda. De fato, se atribuímos o valor 30 para variável y , na segunda função, o valor de x será 10 (não se esqueça que para a segunda função, a primeira coordenada do par ordenado é y e a segunda, x).

O que é domínio em uma função é imagem em sua inversa. E o que é imagem, na sua inversa é domínio. A notação que utilizamos para determinar a função inversa de f é f^{-1} .

Uma função f admite função inversa f^{-1} quando ela é bijetora (todo elemento do contradomínio está associado a um único elemento do domínio).

Para determinar a inversa de uma função, o procedimento varia de acordo com a forma da expressão que a define. No entanto, o que podemos estabelecer como regra é que se a função considerada é definida como $y = f(x)$, devemos isolar x , isto é, obter uma expressão que mostra x (isolado) em função de y . Após isso, podemos trocar as variáveis, pois costumamos considerar que x é a variável independente e y a dependente. Vamos a um exemplo.

Exemplo 4.9

Como podemos determinar a inversa da função $f(x) = \frac{5}{2x-3}$?

Vamos considerar $y = f(x)$ na expressão acima e isolar x , como mostrado a seguir.

$$\begin{aligned} y &= \frac{5}{2x-3} \\ 2x-3 &= \frac{5}{y} \\ 2x &= \frac{5}{y} + 3 \\ x &= \frac{5}{2y} + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Trocando x por y e y por x , temos:

$$y = \frac{5}{2x} + \frac{3}{2}$$

que também pode ser expressa na forma:

$$f^{-1}(x) = \frac{5}{2x} + \frac{3}{2}$$

4.4 Composição de funções

A partir de duas ou mais funções é possível compor novas funções através das operações elementares de adição, subtração, multiplicação e divisão, além de outras. Mas, há uma forma bem conhecida de **composição entre duas (ou mais) funções** em que uma delas é a variável independente da outra. Veja no próximo exemplo algumas formas de realizar a composição entre duas funções.



EXEMPLO

Exemplo 4.10

Considere as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tais que $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2 - 4$.

Podemos obter uma nova função, que denominaremos $h(x)$, de algumas formas diferentes. Veja a seguir:

$$h(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow h(x) = 2x + 1 + x^2 - 4 \Rightarrow h(x) = x^2 + 2x - 3$$

$$h(x) = f(x) - g(x) \Rightarrow h(x) = 2x + 1 - (x^2 - 4) \Rightarrow h(x) = -x^2 + 2x + 5$$

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow h(x) = (2x + 1) \cdot (x^2 - 4) \Rightarrow h(x) = 2x^3 + x^2 - 8x - 4$$

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow h(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 4}$$

A composição pode ocorrer de outras formas também. Mas, quando utilizamos a expressão função composta, geralmente, estamos nos referindo ao tipo de composição entre duas funções em que uma passa a ser a variável independente da outra, como mostrado a seguir.

$$h(x) = f(g(x)) \Rightarrow h(x) = 2(x^2 - 4) + 1 \Rightarrow h(x) = 2x^2 - 7$$

Observe que para obter a função composta $h(x)$, calculamos o “valor” da função f para x igual à função g . Além da representação utilizada na determinação da função composta acima, uma notação bastante utilizada para esse tipo de composição é $f \circ g$ ou $f \cdot g(x)$.

É importante notar que a composição de funções **não é comutativa**, isto é, $f \circ g \neq g \circ f$. Veja, para as funções dadas nesse exemplo, como fica definida a função $g \circ f$:

$$g \circ f = g(f(x)) \Rightarrow g \circ f = (2x + 1)^2 - 4 \Rightarrow g \circ f = 4x^2 + 4x - 3$$

4.5 Funções do primeiro e do segundo grau e seus gráficos

Nesta seção, estudaremos dois tipos elementares de funções e que possuem uma infinidade de aplicações: **função do primeiro grau** e **função do segundo grau** (ou **quadrática**).

Começaremos com a mais simples delas (porém, não menos importante) que é a função do primeiro grau.

Denominamos **função do primeiro grau**, na variável x , toda função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que pode ser escrita na forma

$$f(x) = ax + b \text{ (ou } y = ax + b)$$

Em que **a** e **b** são valores reais quaisquer, com $a \neq 0$.

A constante real a é denominada o **coeficiente angular** (ou de **inclinação**) da função. Ela é sempre o valor (coeficiente) que multiplica a variável independente x e não pode assumir valor zero, pois, dessa forma, a função não teria em sua expressão a variável x , isto é, passaria a ser uma função constante (e não do primeiro grau). A constante **b** é denominada **coeficiente linear** (ou **intercepto**) da função e é sempre o valor que aparece isolado, isto é, não multiplica a variável independente.

O gráfico da função de primeiro grau é sempre uma **reta** e o “sinal” do coeficiente angular **a** determina se ela será **crescente** ($a > 0$) ou **decrescente** ($a < 0$). Já o coeficiente linear, ou intercepto, **b** indica o ponto (valor) no qual a reta, que é o gráfico da função de primeiro grau, cruza o eixo vertical y .

Como o gráfico de uma função do primeiro grau é sempre uma reta, basta conhecer dois pontos pertencentes à ela para que possamos construir graficamente essa relação. Mas, para que você possa entender melhor o significado que o coeficiente angular tem em uma função do primeiro grau, no próximo exemplo iremos obter mais pontos do que o necessário.



EXEMPLO

Exemplo 4.11

Considere a função $f(x) = 2x + 1$. Vamos determinar alguns de seus valores a partir dos seguintes valores de x : -2 , -1 , 0 , 1 e 2 .

$$f(-2) = 2 \cdot (-2) + 1 = -4 + 1 = -3$$

$$f(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 = -2 + 1 = -1$$

$$f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$$

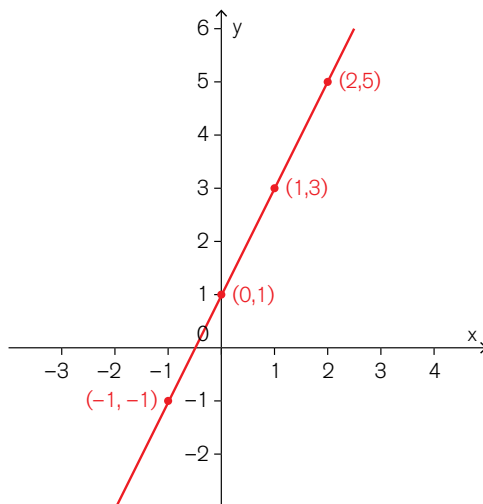
$$f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

Os resultados acima estão representados na seguinte tabela:

x	$F(x)$
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5

Observe que, os valores arbitrariamente atribuídos a x variam positivamente de uma em uma unidade. Enquanto isso, os valores de y variam de duas em duas. Isso deve-se ao fato do coeficiente angular dessa função ser igual a 2. Ele, justamente, determina qual será a variação de y cada vez que x aumenta uma unidade.

Escolhemos apenas alguns valores dentre os infinitos possíveis valores que x pode assumir. Mas, no momento de traçar o gráfico, devemos considerar que os pontos escolhidos apenas representam alguns dos infinitos pontos de uma reta. Então, para traçar o gráfico de uma função do primeiro grau, localizamos os pontos obtidos (lembre-se que dois pontos apenas já são suficientes) e traçamos uma reta passando por eles. Abaixo, veja o gráfico da função $f(x) = 2x + 1$.



A representação gráfica que fazemos de uma função do primeiro grau, logicamente, é limitada (finita). No entanto, a reta é infinita. Portanto, considere que para quaisquer valores que escolhermos no eixo x , sempre teremos um valor associado no eixo y . Isso nos leva a concluir que o domínio de uma função desse tipo é todo o conjunto dos números reais. O mesmo vale para y e para a imagem da função que também é composta por todos os reais. Então, podemos escrever:

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

Uma função do primeiro grau é sempre **bijetora**, pois ela é **injetora** e **sobrejetora**. Como todos os elementos do contradomínio participam da relação (o conjunto imagem é igual ao contradomínio), concluímos que ela é **sobrejetora**. Além disso, sempre que $x_1 \neq x_2$, temos $f(x_1) \neq f(x_2)$, o que nos leva a concluir que ela é **injetora** (cada valor de y está associado a um único valor de x).

Dois pontos que, geralmente, são importantes nas aplicações de funções são **raiz** e **intercepto**. O intercepto é único, mas dependendo do tipo de função, pode haver mais raízes ou também pode não haver nenhuma. A função do primeiro grau possui apenas uma raiz e um intercepto.

A raiz de uma função é o valor (ou os valores) de x para o qual (ou para os quais) a função se anula, isto é,

Se $f(c) = 0$, então c é uma raiz da função $f(x)$

A raiz é sempre o ponto de intersecção do gráfico da função com o eixo x . Então, ele sempre é representado por um par ordenado da forma **(x , 0)**.

Já o intercepto de uma função é o ponto de intersecção do seu gráfico com o eixo y . Ele é sempre da forma **(0, y)**.

Se $f(0) = c$, então c é o intercepto da função $f(x)$.

No caso da função do exemplo que estamos apresentando, a raiz pode ser obtida fazendo $f(x) = 0$ e resolvendo a equação resultante, como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}f(x) &= 0 \\2x + 1 &= 0 \\2x &= -1 \\x &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

A raiz é, portanto, $x = -\frac{1}{2}$, ou podemos também indicá-la através do par ordenado $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$. Veja, no gráfico dessa função, que a intersecção com o eixo x ocorre nesse ponto.

Quanto à determinação do intercepto, basta apenas substituir a variável independente x por zero e calcular o valor da função $f(x)$. Para a função deste exemplo, temos, portanto:

$$\begin{aligned}f(0) &= 2 \cdot 0 + 1 \\f(0) &= 1\end{aligned}$$

Veja, novamente no gráfico, que a intersecção com o eixo x ocorre no valor 1, ou no ponto (0,1). No caso da função do primeiro grau, na forma $f(x) = ax + b$, o intercepto é sempre o coeficiente b .

O exemplo seguinte mostra uma função do primeiro grau em que o coeficiente angular é negativo.

Exemplo 4.12

Seja f a função real (isso é o mesmo que dizer que o domínio e o contradomínio são o conjunto dos números reais) dada por

$$f(x) = -3x + 2$$

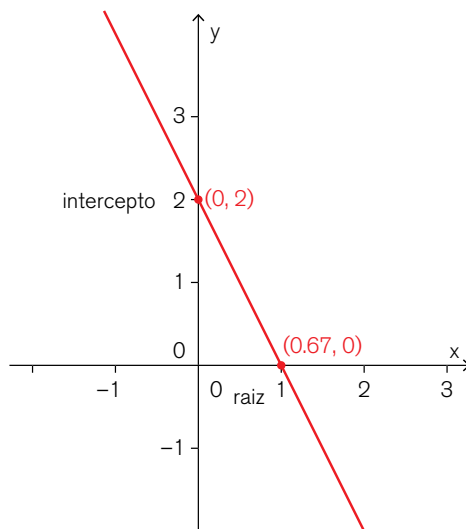
Podemos obter quaisquer dois pontos dessa função para traçar seu gráfico. No entanto, pela importância que geralmente a raiz e o intercepto assumem nas aplicações e nas análises gráficas, vamos elegê-los como os pontos que nos auxiliarão nesse traçado.

O **intercepto** é o ponto $(0, b)$, que nesse caso, é $(0, 2)$.

A raiz é o ponto em que $f(x) = 0$, ou seja, o ponto $\left(0, \frac{2}{3}\right)$. Veja a seguir, como foi obtido o valor $\frac{2}{3}$ deste ponto:

$$\begin{aligned}f(x) &= 0 \\-3x + 2 &= 0 \\-3x &= -2 \\x &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

A seguir, o gráfico da função.



Agora, passaremos a estudar a **função do segundo grau**. Vamos iniciar através de um exemplo que, ao mesmo tempo, mostra como pode surgir uma função desse tipo e qual sua aplicabilidade.

Exemplo 4.13

O proprietário de uma loja de informática compra, mensalmente, 50 unidades de certo roteador por R\$ 70,00 cada. Ele propôs, ao seu fornecedor, que aumentaria sua compra em 2 unidades para cada R\$ 1,00 de desconto que lhe fosse concedido. O fornecedor aceitou a proposta.

Sendo assim, como podemos estabelecer uma função que relacione o valor total y pago pelo proprietário da loja ao fornecedor em função do desconto unitário concedido x ?

O valor que o proprietário pagava ao fornecedor pelas 50 unidades era obtido pelo produto $50 \times 70 = 3.500$ reais. Agora, o preço unitário será dado por " $70 - x$ ", onde x é o valor do desconto (por unidade) e a quantidade comprada será dada por " $50 + 2x$ ", pois para cada unidade de x serão compradas 2 unidades a mais. Dessa forma, denotando por y o valor total a ser pago, teremos:

$$y = (50 + 2x)(70 - x)$$

Desenvolvendo essa expressão, chegamos a:

$$y = -2x^2 + 90x + 3.500$$

que é uma **função do segundo grau**.

São diversas as situações em que uma função desse tipo pode ser aplicada. Na Economia e Administração ela é extremamente útil para otimizar a relação preço ´ quantidade com o objetivo de determinar a quantidade (e o preço) ideal para que se obtenha o maior lucro possível. Na Física, ela é utilizada, por exemplo, no estudo da velocidade de um móvel. No contexto do exemplo que acabamos de ver, ela pode ser utilizada pelo fornecedor do roteador para determinar o valor de desconto x que fará com que o valor pago y seja o maior possível. Para isso, é preciso conhecer algumas propriedades desse tipo de função. É o que faremos a seguir.

Denominamos **função do segundo grau**, na variável x , toda função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que pode ser escrita na forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ (ou } y = ax^2 + bx + c \text{)}$$

Em que a , b e c são valores reais quaisquer, com $a \neq 0$.

Para a função $y = -2x^2 + 90x + 3.500$ do exemplo que acabamos de estudar, temos:

$$a = -2, b = 90 \text{ e } c = 3.500.$$

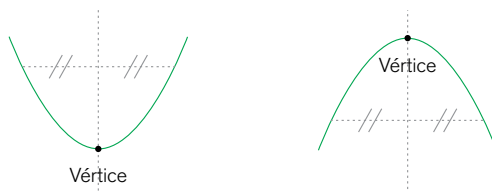
Os coeficientes b e c podem ser iguais a zero, mas o coeficiente a não, pois, se isso ocorrer a função deixa de ser do segundo grau.

O gráfico de uma **função de segundo grau** tem o formato de uma **parábola**, com concavidade que pode estar voltada para cima ou para baixo, conforme o “sinal” do coeficiente a .

Se $a > 0$, a concavidade será voltada **para cima** e se $a < 0$ ela será voltada **para baixo**, como mostrado a seguir.



O vértice da parábola, que você vê indicado na figura acima, é o seu ponto mais baixo, quando a concavidade é voltada para cima, ou o ponto mais alto, quando a concavidade é voltada para baixo. E, em relação ao eixo vertical que passa sobre o vértice, a parábola apresenta **simetria**. Portanto, quando traçamos uma linha horizontal que intercepta a parábola em dois pontos, o segmento determinado por um desses pontos e a intersecção dessa linha com o eixo vertical tem a mesma medida que o segmento determinado por essa intersecção e o outro ponto de cruzamento da linha horizontal com a parábola. Veja a representação nas figuras a seguir.



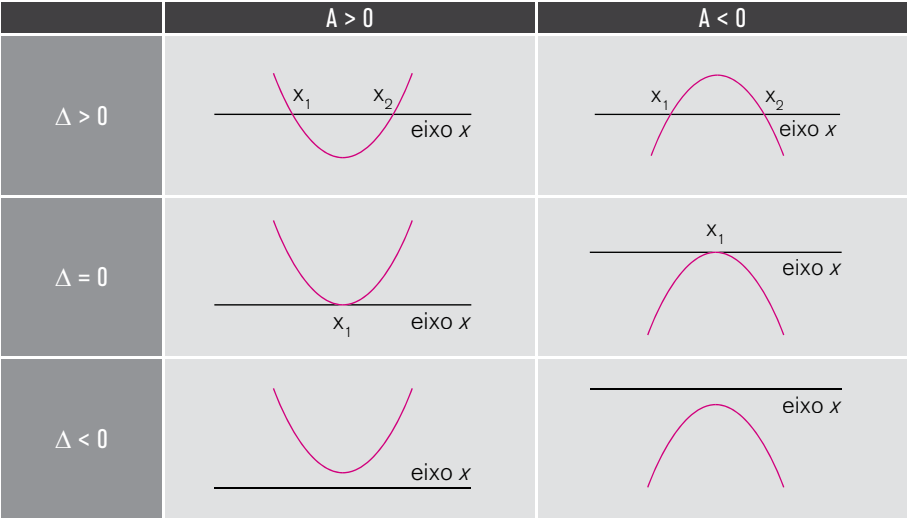
Para traçar o gráfico de uma função do segundo grau, além das informações já mostradas, é importante conhecer as coordenadas de seu vértice e outros pontos notáveis como suas raízes (se existirem) e seu intercepto.

O **intercepto**, lembre-se, é o ponto de intersecção de uma função com o eixo vertical y , ou seja, é o ponto da função em que $x = 0$. No caso de uma função do segundo grau, é sempre o ponto de coordenadas **(0, c)**.

Já vimos que a **raiz** de uma função $y = f(x)$ é o valor que a variável x assume de tal forma que y seja igual a zero. No gráfico, a raiz indica o cruzamento do gráfico da função com o eixo x . Uma função do segundo grau pode ter ou não raízes. Além disso, o encontro da parábola pode se dar em um único ponto ou em dois.

Para calcularmos as raízes da função de segundo grau (se elas existirem), devemos igualar a função $y = f(x)$ a zero e resolver a equação resultante. Você pode utilizar qualquer método de resolução de equação do segundo grau. Aqui, iremos utilizar a **fórmula de Bhaskara**, em que calculamos o discriminante **delta** (Δ). O sinal desse discriminante é que determina o número de raízes da equação e, conseqüentemente, da função do segundo grau.

Na figura a seguir, veja as situações possíveis do traçado de uma parábola, com relação às suas raízes.



Quando igualamos a função do segundo grau à zero, obtemos uma equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$. E a fórmula de Bhaskara que fornece suas raízes (se elas existirem) é:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

em que $\Delta = b^2 + 4ac$.

Há outras formas de determinar as raízes de uma equação do segundo grau, que não serão aqui apresentadas.

O vértice de uma parábola situa-se em seu eixo de simetria. Então sua coordenada x pode ser obtida calculando-se a média entre as raízes, quando elas existirem. Mas, principalmente, quando elas não existem, torna-se mais prático utilizar as fórmulas a seguir para determinar, respectivamente, sua abscissa x_v e sua ordenada y_v :

$$x_v = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

A coordenada y_v sempre representa o valor máximo ou mínimo da função, conforme a concavidade seja voltada, respectivamente para baixo ou para cima. Dessa forma, a coordenada x_v é o valor que atribuímos à variável independente x para obter o valor máximo ou mínimo da função.

Vamos a alguns exemplos de construção de gráficos de funções do segundo grau.

Exemplo 4.14

Vamos esboçar o gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x - 5$.

Nesse caso, temos $a = 1$, $b = -4$ e $c = -5$. Como $a > 0$, então concluímos que a parábola tem concavidade voltada para cima.

As raízes são calculadas igualando-se y a zero e resolvendo a equação resultante:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$$

Temos:

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ \Delta &= (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) \\ \Delta &= 16 + 20 \\ \Delta &= 36\end{aligned}$$

Como Δ é positivo, então concluímos que a função possui duas raízes reais distintas. Vamos calculá-las utilizando a fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{4 \pm 6}{2} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{10}{2} = 5 \\ x_3 = \frac{-2}{2} = -1 \end{array} \right.$$

Portanto, as raízes são 5 e -1.

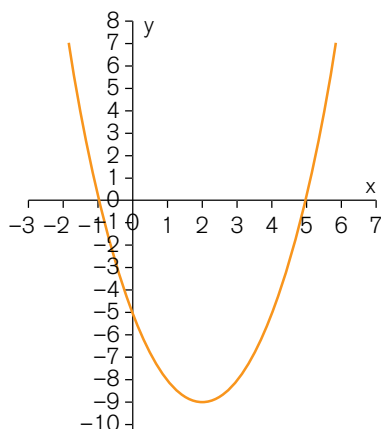
O intercepto é o ponto (0, c), isto é, (0, -5).

As coordenadas do vértice são:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = -\frac{-4}{2} = -(-2) = 2 \text{ e } y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{36}{4 \cdot 1} = -\frac{36}{4} = -9$$

Logo, o vértice é o ponto (2, -9).

A partir dos pontos obtidos, podemos construir o gráfico seguinte:



O **domínio** de uma função quadrática é composto por todos os números reais. Com relação à **imagem**, é preciso considerar que a coordenada y_v (y do vértice) a limita. Se a concavidade da parábola é voltada para cima, então o **conjunto-imagem** é dado por $\text{Im}(f) = [y_v, \infty[$. Quando a concavidade é voltada para baixo, temos $\text{Im}(f) =]-\infty, y_v]$. No caso da função apresentada neste exemplo, temos $\text{Im}(f) = [-9, \infty[$.

Exemplo 4.15

Agora vamos esboçar o gráfico da função $g(x) = -x^2 + 2x - 1$, que possui apenas um ponto de intersecção com o eixo x .

Considerando que $a = -1$, $b = 2$ e $c = -1$, vamos obter os pontos que nos ajudarão no traçado do gráfico. Como $a < 0$, concluímos que a concavidade da parábola é voltada para baixo.

O intercepto é $(0, c) = (0, -1)$.

Igualando $g(x)$ a zero e resolvendo a equação resultante, chegamos às raízes desejadas.

$$g(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x - 1 = 0$$

Daí,

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ \Delta &= 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) \\ \Delta &= 0\end{aligned}$$

Como $\Delta = 0$, então concluímos que a função possui uma única raiz, que determinaremos utilizando a fórmula de Bhaskara:

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x &= \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-1)} \\ x &= \frac{-2 \pm 0}{-2} \\ x &= 1\end{aligned}$$

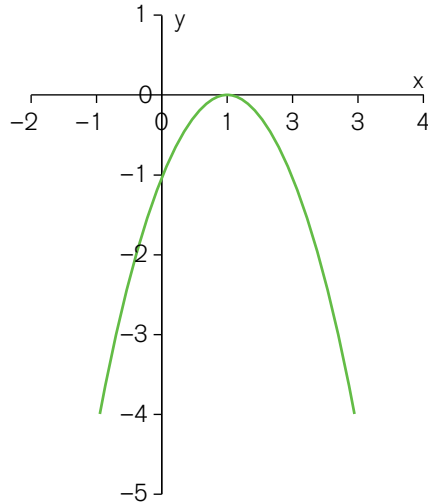
Portanto, a raiz é 1.

As coordenadas do vértice são:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot (-1)} = -\frac{2}{-2} = -(-1) = 1 \text{ e } y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{0}{4 \cdot (-1)} = 0$$

Portanto, o vértice é o ponto $(1, 0)$. Daí, podemos concluir que $\text{Im}(g) = [-\infty, 0]$. Lembre-se que o domínio de toda função do segundo grau é \mathbb{R} .

A seguir o gráfico da função.



Exemplo 4.16

Neste exemplo, veremos um caso em que a função não possui raiz real. Considere a função $h(x) = 2x^2 + 5$.

Temos $a = 2$, $b = 0$ e $c = 5$. Como $a > 0$, então concluímos que a parábola tem concavidade voltada para cima.

Obtemos as raízes, resolvendo a equação $h(x) = 0$, como mostrado a seguir.

$$2x^2 + 5$$

Daí,

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5$$

$$\Delta = -40$$

Como Δ é negativo, então concluímos que a função não possui raiz real.

O intercepto é $(0, 5)$.

As coordenadas do vértice são:

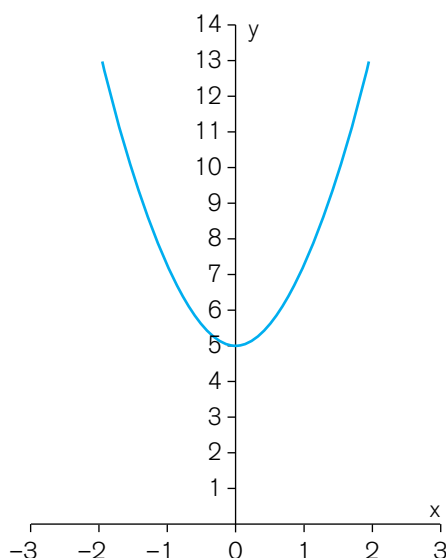
$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2 \cdot 2} = 0 \text{ e } y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{-40}{4 \cdot 2} = -\frac{-40}{8} = -(-5) = 5$$

Observe que essa função, além de não ter raízes, tem vértice e intercepto coincidentes, o que nos leva a ter somente um ponto da parábola que a representa. No entanto, conhecemos a concavidade da parábola e sabemos que ela é simétrica em relação ao ponto que temos (vértice). Isso já é suficiente para fazer um esboço razoável do gráfico. Mas, para ter uma maior precisão no traçado, podemos calcular mais alguns pontos dessa função:

$$f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + 5 = 2 \cdot 1 + 5 = 2 + 5 = 7 \longrightarrow \text{ponto: } (-1, 7)$$

$$f(1) = 2 \cdot 1^2 + 5 = 2 \cdot 1 + 5 = 2 + 5 = 7 \longrightarrow \text{ponto: } (1, 7)$$

Segue o gráfico.



A imagem dessa função é $\text{Im}(h) = [5, \infty[$.



CONEXÃO

Nos endereços abaixo, você encontra vídeos explicativos sobre funções de primeiro e segundo graus.

- <http://youtu.be/KQl2bwnQY0Y> (função do primeiro grau)
- <http://youtu.be/IR1WMsJEEuM> (função do primeiro grau)
- <http://youtu.be/Pw-ROOBQJJ4> (função do segundo grau)
- <http://youtu.be/PdtEwtxDx28> (função do segundo grau)

- <<https://www.youtube.com/watch?v=j1rdtLdo4Rg>> (Construção de gráficos utilizando o Excel e os softwares Grapes e Equation-Graph)
- <<https://www.youtube.com/watch?v=I8JtEEIkSpU>> (função do segundo grau)
- <<https://www.youtube.com/watch?v=uLIVkvld91k>> (função do segundo grau)
- <<https://www.youtube.com/watch?v=dueBly7yHo4>> (aplicações de funções de primeiro e segundo graus)
- <<https://www.youtube.com/watch?v=DTgvUsl6Jak>> (aplicações de funções de primeiro e segundo graus)

4.6 Funções polinomiais

As funções de primeiro e segundo graus, que acabamos de estudar, fazem parte de um grupo de funções que denominamos funções polinomiais.

Uma função **$f(x)$** é denominada **função polinomial de grau n** se pode ser escrita na forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

em que $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, com $a_n \neq 0$.

Uma função polinomial de grau 0 (zero) é uma função constante. Se for de grau 1, é uma função do primeiro grau. A de grau 2 é função quadrática ou do segundo grau. Estas duas últimas nós já estudamos. A função constante é uma função bem simples cujo gráfico é sempre uma reta paralela ao eixo x . Por exemplo, a função constante $f(x) = 3$ é representada graficamente por uma reta paralela ao eixo x e que cruza o eixo y no valor 3.

As funções polinomiais com grau $n \geq 2$ têm comportamentos bem conhecidos e, de certa forma, fáceis de serem determinados. Mas, as funções polinomiais com grau maior que 2 não comportam-se de forma bem padronizada. Há sim, algumas repetições de padrões de comportamento entre funções do terceiro grau, por exemplo, mas não da mesma forma como vimos com funções de graus menores. Portanto, dependendo da função polinomial com a qual

estamos trabalhando, a determinação de suas raízes e a construção do gráfico nem sempre é tarefa fácil.

Nesta seção, veremos, através de alguns exemplos, como podemos determinar as raízes de algumas funções polinomiais, destacando certas propriedades que podem ser generalizadas. Com relação à construção de gráficos, a sugestão é que você calcule e localize alguns pontos da função dada para ter uma noção de seu comportamento. Além disso, é interessante utilizar softwares que auxiliam nesse tipo de trabalho.



CONEXÃO

Veja algumas sugestões no link: <<https://www.youtube.com/watch?v=j1rdtLdo4Rg>>.

Pelos motivos apresentados, não tentaremos aqui, explorar todas as possibilidades de procedimentos que podem ser aplicados para cada tipo de função polinomial (até porque podemos determinar uma infinidade de funções polinomiais aumentando cada vez mais o seu grau). Uma função polinomial de grau 3, por exemplo, pode apresentar comportamento bem distinto de outras funções polinomiais de mesmo grau. Vamos, através dos exemplos seguintes, observar algumas propriedades que merecem destaque.



EXEMPLO

Exemplo 4.17

Considere a função do terceiro grau $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$.

Essa função, como várias outras de mesmo grau, nos permite a representação na forma fatorada, em que cada fator tem grau menor ou igual a 2 e, dessa forma, facilita-nos a determinação de suas raízes.

Podemos reescrever a função $f(x)$ na forma:

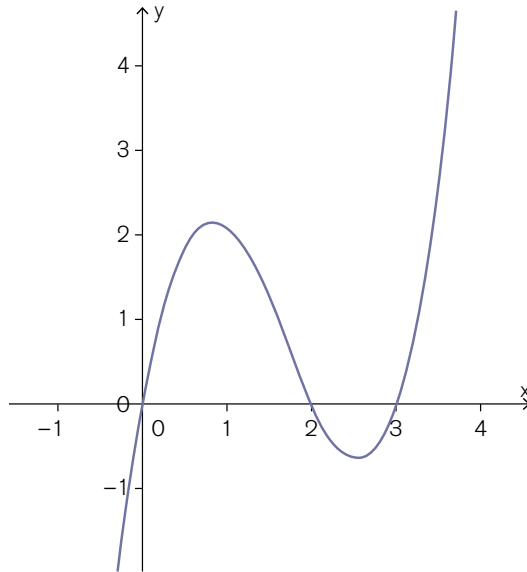
$$f(x) = x \cdot (x^2 - 5x + 6) \text{ ou } f(x) = x \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$$

Nas duas formas apresentadas, se igualarmos cada fator a zero e resolvermos as equações resultantes, chegaremos às raízes da função $f(x)$. Veja:

$$f(x) = 0$$

$$x \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = 3.$$

Conseguimos, portanto, determinar que a função $f(x)$ cruza o eixo x nos valores 0, 2 e 3. Veja o seu gráfico a seguir.



Em todas as funções polinomiais em que o termo independente ao é nulo, é possível fatorar a função colocando o termo x em evidência. E isso, em alguns casos, possibilita a determinação das raízes, como foi o caso da função que acabamos de ver.

Além da determinação das raízes, um procedimento importante é determinar os vértices de uma função polinomial. Mas, o recurso que normalmente se utiliza para tal procedimento não faz parte do escopo deste livro.

Uma característica importante a se destacar a respeito de toda função polinomial é que ela são sempre **contínua** para todo x de seu domínio. Seja qual for o valor real que você atribua a x , sempre será possível calcular o valor de $f(x)$. Graficamente, isso significa que o gráfico de uma função polinomial nunca apresenta nenhum tipo de salto ou interrupção.

No exemplo a seguir, veja uma função polinomial de grau 4 ou função quártica em que conseguimos determinar suas raízes utilizando um método de substituição de variável.

Exemplo 4.18

Considere a função $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$.

Note que é possível efetuar a substituição de x^2 por z , por exemplo. Dessa forma, podemos reescrever a função na forma

$$f(z) = z^2 - 3z + 2$$

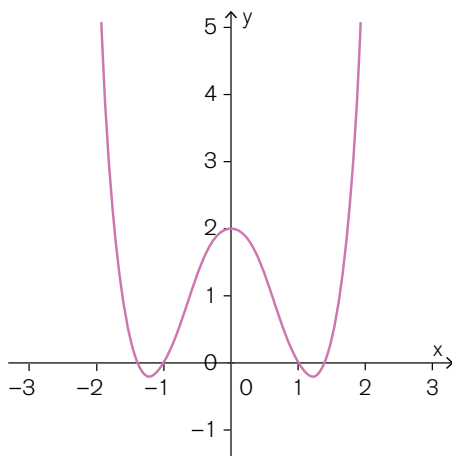
A função f em relação a essa “nova” variável z é uma função do segundo grau com raízes iguais a 1 e 2 (para obtê-las você pode utilizar, por exemplo, a fórmula de Bhaskara, como vimos na seção anterior).

Para cada um dos valores que z assume, podemos ter:

$$z = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$z = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Portanto, as raízes da função $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ são $-\sqrt{2}, -1, 1$ e $\sqrt{2}$. A seguir, o seu gráfico.



CONEXÃO

Acesse: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1367>, e veja um interessante experimento que envolve as funções polinomiais.



ATIVIDADES

01. Para cada um dos pares de conjuntos A e B dados e a relação R de A em B, faça a representação de R utilizando diagramas, indique quais podem ser consideradas funções de A em B e classifique em injetora, sobrejetora e bijetora aquelas relações que são funções.

- a) $A = \{-1, 1, 3, 5\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$, $x R y : x > y + 1$.
- b) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $x R y : y = x^2$.
- c) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 5, 10\}$, $x R y : y = x^2 + 1$.
- d) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$, $x R y : x = \sqrt{y + 1}$.

02. Represente graficamente as relações entre A e B definidas a seguir:

- a) $R = A \cdot B$, $A = [-2, 6[$ e $B = [1, 4]$.
- b) $x R y : x + 1 \geq y - 2$, $A =]-4, 4[$ e $B = [0, 5]$.
- c) $x R y : y = \frac{x-1}{3}$, $A = \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{Z}$.

03. Classifique cada uma das funções seguintes em injetora, sobrejetora ou bijetora e esboce seus gráficos:

- a) $f(x) = 3 + x$
- d) $f(x) = \frac{8-x}{2}$
- g) $y = x^2 - 10x$
- b) $g(x) = 3x - 5$
- e) $y = x^2 - 8x + 7$
- h) $y = -x^2 - 6x - 9$
- c) $y = -2x + 1$
- f) $y = -x^2 - 2$
- i) $y = x^2 + 1$

04. Um taxista cobra R\$ 6,00 por corrida mais R\$ 1,50 por km percorrido. Qual expressão fornece o valor cobrado por esse taxista, em função da distância percorrida (em km)? Quanto receberá por uma corrida de 15 km?

05. O gráfico de uma função de primeiro grau passa pelos pontos (2,5) e (7,20). Qual é a expressão que a representa?

06. Um estudo sobre a demanda de determinado produto revelou que para cada R\$ 1,00 de aumento no preço de venda p, há uma queda de 500 unidades na quantidade demandada q. Sabe-se que para um preço de R\$ 23,00 a quantidade demandada é de 8.000 unidades.

- a) Escreva q em função de p.
- b) Esboce o gráfico da função obtida.
- c) Qual deve ser o preço praticado para que a demanda atinja 12.000 unidades?

07. Uma revista de grande tiragem recebe, a cada edição, R\$ 80.000,00 referente à publicidade mais R\$ 6,00 por unidade vendida. O departamento de marketing apresentou proposta de aumento do valor referente à publicidade para R\$ 100.000,00 por edição. Mas para isso, a receita por unidade vendida cairá para R\$ 4,50.

- a) Determine, para cada uma das situações apresentadas, a expressão que relaciona a receita total por edição em relação à quantidade vendida de revistas.
- b) Esboce os gráficos das duas funções obtidas no mesmo sistema de eixos.
- c) Qual deve ser a quantidade vendida por edição para que as receitas das duas propostas sejam iguais?

08. O lucro L (em milhares de reais) referente à produção e comercialização de uma quantidade de x toneladas de certo produto é dado pela função

$$L = -x^2 + 30x - 125$$

- a) Esboce o gráfico de L em função de x .
- b) Determine a quantidade que deve ser produzida e comercializada para que o lucro seja máximo.
- c) Calcule o lucro máximo.
- d) Quais são os valores de x (em toneladas) que fazem com que o produto dê prejuízo?

09. (Enem 2009) Um posto de combustível vende 10.000 litros de álcool por dia a R\$ 1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi R\$ 1,48, foram vendidos 10.200 litros.

Considerando x o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e V o valor, em R\$, arrecadado por dia com a venda do álcool, então a expressão que relaciona V e x é:

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| a) $V = 10.000 + 50x - x^2$. | d) $V = 15.000 + 50x - x^2$. |
| b) $V = 10.000 + 50x + x^2$. | e) $V = 15.000 - 50x + x^2$. |
| c) $V = 15.000 - 50x - x^2$. | |
-



REFLEXÃO

As funções que acabamos de estudar apresentam inúmeras aplicações, mesmo as mais simples. Compreender que o comportamento de uma variável pode estar vinculado ao comportamento de outra variável pode nos ser útil em diversas aplicações. Não é por acaso que o estudo de funções ocupa posição de importância nos currículos de diversos cursos de áreas variadas.

Não basta reconhecer quando uma relação pode ser considerada uma função ou conhecer, simplesmente, o comportamento de uma função e suas características. É preciso saber aplicá-las em situações contextualizadas. Ao longo do capítulo, algumas características foram apresentadas a partir de situações concretas. Procure, sempre, fazer esse tipo de relação entre o conteúdo teórico apresentado e as situações em que ele pode ser aplicado.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOULOS, P. **Pré-cálculo**. São Paulo: Makron Books, 1999.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto e aplicações. 2. ed. São Paulo: Ática, 2005.

DEMANA, F. D.; WAITS, B. K.; FOLEY, G. D.; KENNEDY, D. **Pré-cálculo**. 7a edição. São Paulo: Pearson, 2009.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A.; DEGENSAJN, D.; PERIGO, R. **Matemática**. Vol. Único. Editora Atual, 2006.

5

Cálculo proposicional

5. Cálculo proposicional

Quando nos deparamos com um ponto de vista que julgamos coerente, costumamos dizer que há lógica no que foi exposto. Mas, há mais do que um significado para a palavra “lógica”. O Grande Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa apresenta algumas definições, dentre elas: (I) encadeamento coerente de alguma coisa que obedece a certas convenções ou regras; (II) coerência, fundamento e (III) forma por que costuma raciocinar uma pessoa ou um grupo de pessoas ligadas por um fato de ordem social, psíquica, geográfica etc.

Todos os significados apresentados, de certa forma, estarão relacionados com a abordagem que faremos da **lógica**, a partir deste capítulo. Mas a terceira é a que mais se aproxima do sentido que daremos ao tratamento da **lógica** como “ciência”.

Definida por Aristóteles, filósofo grego (séc. IV a.C.) como a “ciência” da demonstração, a Lógica Matemática é utilizada para expressar a forma do pensamento na demonstração e argumentação baseadas em proposições. Ela consiste numa ferramenta importante na procura e demonstração da verdade.

Veremos vários processos associados ao estudo da **lógica matemática**, que é **formal e dedutiva**. Você poderá identificar, através do seu estudo, raciocínios ditos **dedutivos**, que são aqueles em que chegamos a uma conclusão a partir de uma ou um conjunto de premissas, através do uso da razão. Esse é um dos objetivos do **cálculo proposicional**.



OBJETIVOS

- Identificar e representar uma proposição;
- Construir e analisar o valor lógico de uma proposição simples;
- Determinar valores lógicos com as operações lógicas fundamentais em proposições compostas;
- Construir a tabela-verdade de uma proposição;
- Construir tabelas-verdade de proposições compostas;
- Interpretar os possíveis valores de uma tabela verdade;
- Identificar tautologias, contradições e contingências;
- Identificar e representar uma Implcação;
- Analisar uma Implcação, usando tabela verdade;
- Determinar a validade de uma Implcação e demonstrá-la;

- Identificar e representar uma equivalência lógica;
 - Demonstrar equivalências lógicas através da construção de tabela-verdade;
 - Negar proposições compostas;
 - Identificar o conjunto numérico binário;
 - Associar os valores lógicos estudados, verdadeiro e falso, ao zero e um;
 - Utilizar a Álgebra Booleana nas análises lógicas;
 - Construir tabela-verdade usando o conjunto binário;
 - Transformar um número no sistema decimal para o sistema binário e vice versa.
-

5.1 Raciocínio e lógica: linguagem natural e linguagem simbólica

Em nosso cotidiano, vemos a aplicação da palavra **lógica** aplicada, frequentemente, com sentido diferente daquele que será utilizado neste e no próximo capítulo. O termo **logos**, do grego e do qual se origina a palavra lógica, é utilizado para designar **razão**. Raciocinar de forma lógica significa determinar o modo coerente pelo qual coisas ou acontecimentos se encadeiam, utilizar a razão para estabelecer relações de causa e efeito. O uso da lógica nos auxilia a organizar nossas ideias de forma acessível e ordenada.

A lógica de nosso cotidiano nos leva a procurar uma interpretação mais adequada para a situação que nos é apresentada. Já a Lógica Matemática exige que a interpretação de uma questão deve ser precisa. Não há mais do que uma interpretação para uma sentença. Há um rigor maior na análise da lógica dos raciocínios analisados. Na **linguagem natural**, há muitos casos de ambiguidade em que uma mesma sentença pode conter mais do que um significado. Isso não pode ocorrer com as sentenças utilizadas na Lógica Matemática.

Por esse motivo, utilizamos uma **linguagem simbólica** para representar o raciocínio que iremos analisar. Assim como ocorre em outras áreas da Matemática, a linguagem utilizada nos permite apenas uma interpretação, isto é, não deve nos deixar em dúvida sobre o que está sendo afirmado.

Vamos, a seguir, apresentar alguns exemplos de raciocínios para ilustrar as diferenças entre a lógica cotidiana e a matemática.



EXEMPLO

Exemplo 5.1

Considere as afirmações a seguir:

“Ontem, quando Rafaela acordou, observei que havia muitas nuvens escuras no céu.

Depois choveu.

Hoje, Rafaela também observou muitas nuvens escuras no céu. Concluiu, então, que vai chover novamente.”

Não podemos deixar de considerar que há certa coerência no raciocínio apresentado. Não só pela observação de “ontem”, mas nossa vivência nos leva a concluir que se há nuvens escuras no céu, há grandes chances de chover. O argumento de Rafaela para concluir que “vai chover” é coerente, justificável. Em nosso dia-a-dia, qualificamos de “lógico” um “raciocínio” quando, de acordo com nosso entendimento, ele é justificável.

Esse é um raciocínio que lida com probabilidade: “é bem provável que chova, pois há nuvens escuras no céu”. Mas, não podemos afirmar com certeza de que irá chover. A lógica matemática lida com o que chamamos de **raciocínio dedutivo**, que é uma modalidade de raciocínio lógico que se baseia em certas premissas (sentenças ou proposições) para chegar, com certeza, a determinada conclusão.

No uso que fazemos da linguagem natural, nem sempre nos preocupamos em ter certo rigor no desenvolvimento do raciocínio. Mas, quando utilizamos a linguagem simbólica para representar algum raciocínio, a análise é precisa e exata. Não deve pairar nenhum tipo de dúvida sobre a veracidade ou não do que se está analisando.

Veja, no próximo exemplo, uma situação em que a utilização da linguagem natural não corresponde exatamente ao que se representa na linguagem simbólica da lógica.

Exemplo 5.2

Ao despejar o suco em seu copo, Júlia derramou um pouco fora dele. Sua irmã, vendo tudo, exclamou: “Cuidado, Júlia! Você despejou mais suco fora do copo do que dentro dele!”.

Muitas de nossas afirmações não querem dizer o que realmente significam. Da forma como a frase foi dita pela irmã de Júlia, parece-nos que ela quis apenas dizer que Júlia derramou bastante suco fora do copo, mas, não necessariamente, que a quantidade desperdiçada tenha sido maior do que a despejada dentro do copo. É somente uma forma de dizer que a quantidade de suco derramado não foi pouca.

Quando se trata de uma análise sob a ótica da Lógica Matemática, uma afirmação como essa só deve ser utilizada se realmente a quantidade de suco derramada para fora do copo for maior do que a despejada dentro.

No exemplo a seguir, temos a apresentação de um raciocínio que podemos analisar do ponto de vista da lógica matemática.

Exemplo 5.3

O pai de Lorena lhe diz que se ela brigar com suas irmãs, não irá ao cinema com suas amigas. E Lorena não foi ao cinema com suas amigas. Podemos, logicamente, concluir que Lorena brigou com suas irmãs. Podemos mesmo?

É preciso tomar cuidado! O fato de Lorena não ir ao cinema pode não dever-se ao fato de ter ou não brigado com suas irmãs. Outro motivo pode ter causado sua não ida ao cinema. Na Lógica Matemática não existem provavelmente, talvez etc. Só podemos concluir algo quando tivermos total certeza.

Na **lógica matemática**, esse raciocínio pode ser apresentado na forma:

“Se Lorena brigar com suas amigas, então não irá ao cinema com suas amigas”.

Na linguagem simbólica que utilizamos na lógica matemática, tal raciocínio pode ser descrito na forma:

“Se p , então q ”,

onde consideramos que p é a proposição “Lorena briga com suas irmãs” e q é “Lorena não irá ao cinema com suas amigas”. Nesse tipo de raciocínio, estamos utilizando um dos denominados **conectivos lógicos** (que estudaremos mais à frente). E o raciocínio descrito por tal conectivo só é falso quando a primeira sentença (p) é verdadeira e a segunda (q) é falsa. Sendo assim, o fato de Lorena não ter ido ao cinema, não implica, necessariamente, que ela tenha brigado com suas irmãs. Se ela brigar, não irá ao cinema. Mas, se ela não brigar, tanto pode ir como não ir ao cinema.

Em outras palavras, o raciocínio descrito só será falso se Lorena brigar com suas irmãs e, mesmo assim, for ao cinema com suas amigas.

A Lógica Matemática é considerada **dedutiva** e **formal**. Entende-se por dedução a obtenção de uma conclusão a partir de certas informações, seguindo uma linha de raciocínio. Num processo dedutivo, dentro da Lógica Matemática, a conclusão deve ser totalmente precisa. Não se pode admitir a possibilidade dela não ocorrer daquela forma.

Para compreender melhor o que você acabou de ler, veja o exemplo seguinte.

Exemplo 5.4

Todo número natural é inteiro.

Todo número inteiro é racional.

Então, todo número natural é racional.

Note que, aqui, se considerarmos verdadeiras as premissas “*Todo número natural é inteiro*” e “*Todo número inteiro é racional*”, não há dúvida alguma de que a conclusão “*todo número natural é racional*” é verdadeira. Trata-se, portanto, de um raciocínio dedutivo. Além disso, mesmo que não saibamos o que são números naturais, inteiros e racionais, podemos concluir pela veracidade da conclusão. Por isso, chamamos tal lógica de **formal**. Ela preocupa-se com a forma do pensamento e não com seu conteúdo. Se substituirmos a expressão “*número natural*” pelo símbolo A, o termo “*número inteiro*” pelo símbolo B e “*número racional*” por C, podemos reescrever o raciocínio da seguinte forma:

Todo A é B.

Todo B é C.

Então, Todo A é C.

Raciocínios como o apresentado no Exemplo 5.4 são conhecidos por silogismos. Um silogismo tem as seguintes propriedades:

- Possuem duas sentenças (premissas), que servem como ponto de partida para a dedução; dessas sentenças decorre uma outra, que é a conclusão.
- Tanto as premissas quanto a conclusão são sentenças que têm um sujeito e um predicado. A vinculação entre eles dá-se por certas palavras que chamamos palavras lógicas.



CONEXÃO

No endereço seguinte, você encontra um vídeo, chamado “A lógica de Alice” que apresenta de forma clara e interessante as diferenças entre a lógica cotidiana e a lógica matemática. Os exemplos apresentados baseiam-se na história de “Alice no país das maravilhas”. Vale a pena assistir!

<<http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1127>>.

No exemplo a seguir, veja um exemplo de silogismo apresentado por Aristóteles.

Exemplo 5.5

<i>Todo mamífero é animal.</i>	(premissa)
<i>Todo cavalo é mamífero.</i>	(premissa)
<i>Todo cavalo é animal.</i>	(conclusão)

O sujeito da primeira premissa é “mamífero” e o predicado, “animal”. Eles estão vinculados pelo termo lógico “é”. A mesma estrutura apresenta-se na outra premissa, em que o sujeito é “cavalo” e o predicado é “mamífero”, e na conclusão que tem cavalo como sujeito e “animal” como predicado, com vinculações também realizadas pela palavra lógica “é”.

Outros exemplos de palavras lógicas são: todos, existe algum, ou, se...então, não. Alguns são chamados de **conectivos** e outros de **quantificadores**. Todos serão estudados neste ou no próximo capítulo.

5.2 Proposições simples e compostas

Primeiro, precisamos reconhecer o que é uma **proposição**. Para isso, considere as sentenças apresentadas no exemplo a seguir.



EXEMPLO

Exemplo 5.6

Na linguagem natural, há vários tipos de proposições (sentenças). Veja algumas:

- Exclamativa: “*Que lindo gol!*”
- Interrogativa: “*Você torce para que time?*”
- Imperativa: “*Empenhe-se mais!*”
- Declarativa: “*O futebol é o esporte mais popular do Brasil.*”

Apenas o último tipo de sentença é objeto de estudo da lógica matemática, pois, somente **sentenças declarativas** podem ser classificadas em **verdadeiras** ou **falsas**.

As proposições que serão utilizadas no desenvolvimento da Lógica Matemática apresentada nesse livro são apenas as declarativas, pois elas podem ser classificadas em verdadeiras ou falsas.

Proposição é um conceito primitivo que possui as seguintes características:

- Deve ser afirmativa;
- Apresenta pensamento de sentido completo;
- Pode ser escrita tanto na forma simbólica como na linguagem natural.

Somente sentenças que podem ser classificadas em verdadeiras ou falsas é que são consideradas **proposições** no cálculo proposicional. Uma sentença como " $x^2 = 4$ " não é uma proposição, pois para que ela possa ser classificada em verdadeira ou falsa é preciso saber qual valor é atribuído a x . Trata-se de uma **sentença aberta**. Sentenças como essa são denominadas **predicados** e, no próximo capítulo, será abordado o **cálculo de predicados**.

O exemplo a seguir apresenta algumas proposições ilustram bem as formas com as quais trabalharemos neste capítulo.

Exemplo 5.7

- I. *A Bahia é um estado brasileiro.*
- II. *O Japão é um país europeu.*
- III. *O número 46 é múltiplo de 16 ou divisor de 92.*
- IV. *Se João é pintor, então ele é artista ou professor.*
- V. *O número 2 é primo e par.*

Todas as proposições acima são declarativas (ou afirmativas) e apresentam sentido completo. Sendo assim, cada uma delas pode ser classificada em verdadeira ou falsa. As proposições apresentadas em (I) e (V) são verdadeiras. Já as proposições em (II) e (III) são falsas. E quanto à proposição em (IV)? Como podemos avaliá-la? Somente quem conhece o João é que pode dizer se essa proposição é verdadeira ou não. Mas isso não torna essa sentença aberta, pois a afirmação refere-se a um sujeito específico e, dessa forma, alguém (quem conhece o João) pode classificá-la corretamente.

Observe, também, que todas podem ser escritas na forma simbólica.

Outro ponto que vamos destacar a partir das sentenças deste exemplo é que algumas podem ser separadas em duas ou mais proposições. Na sentença (III), por exemplo, podemos destacar as sentenças "o número 46 é múltiplo de 16" e "o número 46 é divisor de 92". Se a denotarmos, respectivamente, por **p** e **q**, podemos reescrever a sentença (III) na forma: **$p \vee q$** (lê-se "p ou q"). Sentenças lógicas que possuem essa forma são consideradas verdadeiras se pelo menos uma das sentenças que as compõem é verdadeira. Nesse caso, a sentença p ("o número 46 é múltiplo de 16") é falsa, mas a sentença q ("o número 46 é divisor

de 92") é verdadeira, então a sentença $p \vee q$ ("O número 46 é múltiplo de 16 ou divisor de 92") é verdadeira.

A sentença (IV) também é composta por mais do que uma sentença. Se denotarmos por p a sentença "João é pintor", por q a sentença "João é artista" e por r a sentença "João é professor", podemos expressar de forma simbólica a proposição (IV) como:

$$p \rightarrow (q \vee r)$$

(Lê-se: "se p , então q ou r ")

Esta sentença mostra bem uma vantagem da linguagem simbólica em relação à natural, pois a estrutura da sentença lógica, com o uso dos parênteses, não nos deixa dúvida sobre o que se está afirmando, ou seja, se "João é pintor", então pode ocorrer duas situações: "João é artista" ou "João é professor" (ou ambas). Na linguagem natural, quando afirmamos que "Se João é pintor, então ele é artista ou professor" não fica totalmente claro se o que se está querendo afirmar. Pela linguagem natural, tanto pode ser

$$p \rightarrow (q \vee r)$$

como

$$(p \rightarrow q) \vee r.$$

Essas duas sentenças têm significados bem distintos. Você verá, mais adiante, que tais estruturas levam a resultados lógicos bem distintos.

Mas, voltando à questão do número de proposições que compõem outra proposição, vemos que há algumas que não contêm nenhuma outra proposição como parte integrante de si mesma. Dizemos que elas não possuem nenhum conectivo como "não é verdade que", "e", "ou", "se ... então" (ou "implica") e "se e somente se" (ou "equivalência"). Sentenças assim são denominadas **proposições simples**, e são representadas por letras minúsculas de nosso alfabeto.

Neste exemplo, temos as seguintes proposições simples: "*A Bahia é um estado brasileiro*" e "*O Japão é um país europeu*".

Já as sentenças "*O número 46 é múltiplo de 16 ou divisor de 92*", "*Se João é pintor, então ele é artista ou professor*" e "*O número 2 é primo e par*" possuem duas ou mais proposições simples, ligadas por conectivos. São, portanto, denominadas proposições compostas, e são representadas por letras maiúsculas de nosso alfabeto.

Toda proposição lógica, seja ele simples ou composta, tem apenas dois valores lógicos ou veritativos: **verdadeiro (V)** ou **falso (F)**. Podemos também representar esses valores, respectivamente, por "**1**" e "**0**".

No cálculo proposicional, cada **proposição simples** é considerada um **átomo**. Uma sentença em que são combinadas proposições simples (átomos) através do uso de conectivos é denominada uma **sentença atômica**.

Existem dois princípios que consideramos no estudo da lógica matemática. São eles:

- Princípio da Não-Contradição: uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa.
- Princípio do Terceiro Excluído: toda proposição ou é só verdadeira ou só falsa, nunca ocorrendo um terceiro caso.

O que concluímos a partir desses dois princípios é que para toda proposição que consideramos, ela sempre será verdadeira ou falsa. Não há talvez e nenhuma proposição pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

Na próxima seção será apresentada uma ferramenta extremamente útil no estudo dos valores veritativos de proposições compostas, que é a **tabela-verdade**.

5.3 Tabelas-verdade e conectivos

Qualquer **proposição composta** pode ser verdadeira ou falsa, dependendo dos valores veritativos das proposições simples que a compõem e da forma como estas são unidas. Isto é, depende dos valores lógicos dessas proposições simples e dos **conectivos** que as unem. Nesta seção, estudaremos tais **conectivos** e a construção de **tabelas-verdade**, que é uma forma muito útil de análise de valores veritativos de proposições compostas.

Há muitas proposições simples que podem ser classificadas facilmente em verdadeiras ou falsas, como por exemplo, “o número 3 é ímpar”. Sabemos que ela é verdadeira. Já a sentença simples “Todo primo é ímpar” é falsa. No entanto, a **lógica formal** (lembre-se que a lógica matemática é formal, como já estudamos no início deste capítulo) preocupa-se apenas com a forma (estrutura) da proposição composta. Por isso, devemos considerar que cada proposição simples que a compõe pode ser verdadeira ou falsa. E devemos considerar todas as possibilidades de arranjos de valores veritativos das proposições simples componentes da proposição composta.

Além disso, temos que considerar que, muitas vezes, não nos caberá decifrar o valor lógico das proposições simples porque estaremos lidando com

sentenças abertas, que são aquelas em que, no sujeito, ocorre a presença de uma **variável**. Esses casos serão estudados no próximo capítulo.

Mas, de qualquer forma, há proposições que não temos ou não sabemos como classificá-las em verdadeiras ou falsas. E, nesses casos, precisaremos considerar as duas possibilidades.

Veja o exemplo a seguir para compreender melhor.



EXEMPLO

Exemplo 5.8

A proposição “Alessandra é brasileira” apresenta sujeito bem definido: Alessandra. Quem a conhece poderá dizer se ela realmente é brasileira. Mas, se eu não a conheço, não saberei dizer se essa proposição é verdadeira ou falsa.

Exemplo 5.9

Considere a proposição “Tenho mais que 20 anos e menos que 50”. Eu e mais algumas pessoas próximas a mim sabem se essa proposição é verdadeira ou não. Mas, e você? Se você não me conhece, não conseguirá avaliar a sua veracidade. Além disso, trata-se de uma proposição composta. Vamos denotá-la por A e as proposições simples que a compõem são:

p : “Tenho mais que 20 anos” e q : “Tenho menos que 50 anos”.

Sendo assim, podemos representar a proposição A na forma simbólica como:

$$A: p \vee q.$$

E para analisar o valor veritativo de A , devemos considerar os valores veritativos de p e q . A tabela-verdade abaixo apresenta todas as situações possíveis. Veja:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Como há duas proposições representadas na tabela-verdade acima, ela possui quatro linhas de valores lógicos (22). Se tivermos três proposições, a tabela terá 8 linhas (23). De forma geral, se tivermos n proposições simples, a tabela-verdade terá 2^n linhas.

Como os valores lógicos também podem ser representados por 0 e 1, no lugar de F e V, respectivamente, a tabela-verdade anterior pode ser também apresentada da seguinte forma:

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

O valor veritativo de uma proposição também pode ser indicado na forma:

$$V(p) = 0 \quad (\text{a proposição } p \text{ é falsa})$$

ou

$$V(p) = 1 \quad (\text{a proposição } p \text{ é verdadeira})$$

Se tivermos, por exemplo, quatro proposições simples formando uma proposição composta, a tabela verdade terá $2^4 = 16$ linhas. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 5.10

A tabela a seguir apresenta todas as possibilidades de combinações dos valores lógicos de 4 proposições simples.

p	q	r	s
V	V	V	V
V	V	V	F
V	V	F	V
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	V	F
V	F	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	V	F
F	V	F	V
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	V	F
F	F	F	V
F	F	F	F

Já vimos alguns exemplos de proposições compostas, tais como, “O número 46 é múltiplo de 16 ou divisor de 92” e “Se $x^2 = 4$, então $x = -2$ ou $x = 2$ ”. Nelas, percebemos os conectivos “ou” e “se...então”. Em todas as proposições lógicas é muito comum o uso de expressões

como “não é verdade que”, “e”, “ou”, “se...então” e “se e somente se”. Elas são chamadas de **conectivos lógicos** ou **operadores lógicos**.

A seguir, apresentaremos cada um dos conectivos utilizados na lógica matemática e suas respectivas tabelas-verdade.

5.3.1 Negação

O conectivo “não é verdade que” prefixa uma proposição para formar uma nova, que é chamada de **negação** da primeira.

Notação: $\sim p$ (lê-se: “não é verdade que p” ou “é falso que p”)

É o único dos conectivos que, na verdade, não conecta duas proposições, mas modifica uma proposição, obtendo outra proposição.

O símbolo “ \neg ” também pode ser utilizado para indicar a negação de uma proposição.



EXEMPLO

Exemplo 5.11

Seja a proposição p: “O Palmeiras é o melhor time do Brasil”. Sua negação, denotada por $\sim p$, é dada por “não é verdade que o Palmeiras é o melhor time do Brasil”, ou “é falso que o Palmeiras é o melhor time do Brasil”, ou “O Palmeiras não é o melhor time do Brasil”

Para a negação, temos:

- se $V(p) = 1$, então $V(\sim p) = 0$;
- se $V(p) = 0$, então $V(\sim p) = 1$.

A sua tabela-verdade é:

p	$\sim p$
V	F
F	V

5.3.2 Conjunção

A **conjunção** de duas proposições p e q é uma proposição que só é verdadeira quando $V(p) = V(q) = 1$. Nos demais casos ela é falsa.

Notação: $p \wedge q$ (lê-se: “ p e q ”)



EXEMPLO

Exemplo 5.12

Considere as proposições:

p : “O número 3 é natural” e q : “O número 3 é racional”.

A conjunção de p e q , nesse caso, será dada por:

$p \wedge q$: “O número 3 é natural e racional”.

Observe $p \wedge q$ é considerada verdadeira porque o número 3 é um número natural e também é racional (todo número natural é também racional).

Exemplo 5.13

Considere as proposições:

p : “O número p é um número irracional” e q : “O número -2 é um número natural”.

Temos aqui uma proposição (átomo) verdadeira que é p e outra falsa, que é q .

Quando afirmamos que:

“O número π é um número irracional e o número -2 é um número natural”,

estamos utilizando a conjunção de p e q , isto é, “ $p \wedge q$ ”.

Mas, essa conjunção é falsa, pois uma das suas proposições componentes é falsa.

Na forma simbólica, podemos representar os valores veritativos de uma proposição composta pela conjunção de duas proposições simples, da seguinte forma:

- se $V(p) = 1$ e $V(q) = 1$, então $V(p \wedge q) = 1$;
- se $V(p) = 1$ e $V(q) = 0$, então $V(p \wedge q) = 0$;

- se $V(p) = 0$ e $V(q) = 1$, então $V(p \wedge q) = 0$;
- se $V(p) = 0$ e $V(q) = 0$, então $V(p \wedge q) = 0$;

Utilizando a tabela-verdade, temos:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

5.3.3 Disjunção (ou Disjunção Inclusiva ou Soma Lógica)

A **disjunção** (ou **disjunção inclusiva**) de duas proposições p e q é uma proposição que somente é falsa se p e q forem ambas falsas. Caso contrário, a disjunção é verdadeira.

Notação: $p \vee q$ (lê-se: “ p ou q ”)



EXEMPLO

Exemplo 5.14

Considere as proposições:

p : “*Gabriela é médica*” e q : “*Valentina é dentista*”.

A disjunção de p e q é dada por:

$p \vee q$: “*Gabriela é médica ou Valentina é dentista*”.

Se uma das proposições for verdadeira, ou ambas, então a disjunção “ $p \vee q$ ” será também verdadeira. Essa disjunção somente será falsa, se ambas forem falsas, isto é, se Gabriela não for médica e Valentina não for dentista.

A representação dos valores lógicos da disjunção a partir dos valores lógicos de suas proposições componentes pode ser escrita do seguinte modo:

- se $V(p) = 1$ e $V(q) = 1$, então $V(p \vee q) = 1$;
- se $V(p) = 1$ e $V(q) = 0$, então $V(p \vee q) = 1$;
- se $V(p) = 0$ e $V(q) = 1$, então $V(p \vee q) = 1$;
- se $V(p) = 0$ e $V(q) = 0$, então $V(p \vee q) = 0$;

Ou também podemos representar utilizando sua tabela-verdade:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

5.3.4 Disjunção Exclusiva

A **disjunção exclusiva** entre duas proposições p e q é uma proposição verdadeira somente quando seus valores lógicos forem diferentes, ou seja, $V(p) \neq V(q)$, e falsa quando seus valores lógicos forem iguais, $V(p) = V(q)$.

Notação: $p \underline{\vee} q$ (lê-se: “ p ou q , mas não ambos”)

A única diferença entre a disjunção inclusiva e a disjunção exclusiva é que a primeira é considerada verdadeira também quando as duas proposições que a compõem são verdadeiras e a segunda, nesse caso, é considerada falsa. Na linguagem natural, geralmente, diferenciamos uma da outra com a repetição do termo “ou”. Veja um exemplo.



EXEMPLO

Exemplo 5.15

A proposição “Breno foi ao cinema **ou** ao teatro” é uma **disjunção inclusiva**, pois é verdadeira caso Breno tenha ido ao cinema, ou ao teatro ou a ambos.

A proposição “**Ou** Breno foi ao cinema **ou** foi ao teatro” nos dá a ideia de que só será verdadeira se Breno tenha ido ao cinema ou ao teatro, mas não em ambos. Ou um, ou outro. Nesse caso, se ele foi aos dois, então a disjunção é falsa. Por isso, dizemos que é uma **disjunção exclusiva**.

A representação dos valores lógicos da disjunção exclusiva a partir dos valores lógicos de suas proposições componentes pode ser escrita do seguinte modo:

- se $V(p) = 1$ e $V(q) = 1$, então $V(p \underline{\vee} q) = 0$;
- se $V(p) = 1$ e $V(q) = 0$, então $V(p \underline{\vee} q) = 1$;
- se $V(p) = 0$ e $V(q) = 1$, então $V(p \underline{\vee} q) = 1$;
- se $V(p) = 0$ e $V(q) = 0$, então $V(p \underline{\vee} q) = 0$;

Representando na tabela-verdade, temos:

p	q	$p \vee q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

5.3.5 Condicional

Quando duas proposições estão conectadas de tal forma que há uma relação de implicação entre elas, dizemos que elas formam uma terceira proposição que tem a forma de um **condicional**. Dadas as proposições p e q, o condicional $p \rightarrow q$ é falso somente quando $V(p) = 1$ e $V(q) = 0$, e é verdadeira nos demais casos.

Notação: $p \rightarrow q$ (lê-se: “Se p então q”)

A proposição p recebe o nome de **antecedente** e q de **consequente**. A proposição composta por duas proposições simples conectadas pelo condicional indica que se o **antecedente** ocorre (é verdadeiro), então o **consequente** também tem que ocorrer.



EXEMPLO

Exemplo 5.16

Considere a seguinte frase dita a Marcelo pelo seu pai:

“Filho, se hoje eu ganhar na loteria, te darei um carro”

Para saber se o pai de Marcelo está dizendo a verdade, é preciso, primeiro, verificar se ele ganhou ou não na loteria. Se não ganhou, ele estará dizendo a verdade dando ou não o carro a Marcelo. Se ganhou e deu o carro a Marcelo, como prometido, estará dizendo a verdade. No entanto, se ele ganhou na loteria e não deu o carro, então estará mentindo.

Esse tipo de estrutura que vemos na frase do pai de Marcelo é conhecida na lógica matemática como **condicional**. Podemos, por exemplo, separar essa frase em duas proposições:

p : “hoje ganhei na loteria” e q : “vou te dar um carro”.

Dessa forma, na linguagem simbólica a frase pode ser escrita como:

$$p \rightarrow q$$

Pela análise acima sobre a veracidade do que foi dito pelo pai de Marcelo, concluímos que um condicional “ $p \rightarrow q$ ” só é falso quando p é verdadeira e q é falsa. Sendo assim, podemos descrever os valores lógicos de um condicional da seguinte forma:

- se $V(p) = 1$ e $V(q) = 1$, então $V(p \rightarrow q) = 1$;
- se $V(p) = 1$ e $V(q) = 0$, então $V(p \rightarrow q) = 0$;
- se $V(p) = 0$ e $V(q) = 1$, então $V(p \rightarrow q) = 1$;
- se $V(p) = 0$ e $V(q) = 0$, então $V(p \rightarrow q) = 1$;

Ou também podemos representar utilizando sua tabela-verdade:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Pela análise da tabela-verdade, podemos concluir que um condicional só é falso quando ocorre o caso VF, nessa ordem.

5.3.6 Bicondicional

Dadas duas proposições p e q , o bicondicional $p \leftrightarrow q$ é uma proposição verdadeira quando $V(p) = V(q)$ e falsa quando $V(p) \neq V(q)$.

Notação: $p \leftrightarrow q$ (lê-se: “ p se, e somente se, q ”).

Podemos considerar o bicondicional “ p se, e somente se, q ” como sendo uma conjunção dos condicionais “ $se\ p\ então\ q$ ” e “ $se\ q\ então\ p$ ”. Dessa forma, o bicondicional será verdadeiro somente quando p e q forem ambos verdadeiros.



EXEMPLO

Exemplo 5.17

Imagine, agora, se no exemplo anterior, o pai de Marcelo lhe tivesse dito:

"Filho, te darei um carro somente se eu ganhar na loteria hoje"

Veja como muda o sentido da frase dita aqui. Neste caso, o pai de Marcelo só estará dizendo a verdade em duas situações: (I) se ganhar na loteria e der o carro a Marcelo e (II) se não ganhar na loteria e não der o carro a Marcelo. A diferença agora é que se ele não ganhar na loteria, e der o carro a Marcelo não estará dizendo a verdade (ao contrário do que ocorria no caso do condicional).

A representação dos valores lógicos do condicional a partir dos valores lógicos de suas proposições componentes pode ser escrita do seguinte modo:

- se $V(p) = 1$ e $V(q) = 1$, então $V(p \leftrightarrow q) = 1$;
- se $V(p) = 1$ e $V(q) = 0$, então $V(p \leftrightarrow q) = 0$;
- se $V(p) = 0$ e $V(q) = 1$, então $V(p \leftrightarrow q) = 0$;
- se $V(p) = 0$ e $V(q) = 0$, então $V(p \leftrightarrow q) = 1$;

Ou também podemos representar utilizando sua tabela-verdade:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

5.3.7 Ordem de precedência dos conectivos

Vimos os conectivos lógicos apresentados em vários exemplos de proposições compostas, até o momento. No entanto, em cada uma delas foi utilizado apenas um conectivo por vez. Nas próximas seções, serão apresentadas proposições compostas por mais que um conectivo e, nesses casos, é preciso considerar a seguinte ordem de precedência na interpretação de tais proposições:

- negação;
- conjunção e disjunção (a que aparecer primeiro);

- III. condicional;
- IV. bicondicional.

Essa ordem só não será seguida quando, na composição da proposição, ocorrer o uso de parênteses, colchetes e/ou chaves.

★ EXEMPLO

Exemplo 5.18

Veja algumas proposições que diferem pelo uso de parênteses e qual a ordem de aplicação dos conectivos.

a) $\sim q \wedge r$

Aqui, temos uma conjunção entre “ $\sim q$ ” e “ r ”. A negação é apenas da proposição p .

b) $\sim (q \wedge r)$

Agora, a negação é de toda a conjunção “ $q \wedge r$ ”. E vale destacar que “ $\sim (q \wedge r)$ ” é bem diferente de “ $\sim q \wedge r$ ” quando realizamos a análise de seus valores lógicos.

c) $p \rightarrow q \vee r$

Nesse caso, primeiro consideramos a disjunção “ $q \vee r$ ”, para depois realizar o condicional. Isso significa que temos um condicional em que o antecedente é “ p ” e o consequente é “ $q \vee r$ ”

d) $(p \rightarrow q) \vee r$

Observe como a presença dos parênteses, aqui, modifica a ordem de aplicação dos conectivos, em relação ao item (c). Agora, primeiro realizamos a análise do condicional para, depois, considerarmos a disjunção entre ele e a proposição “ r ”.

e) $p \rightarrow q \leftrightarrow r \rightarrow t$

O conectivo principal (final), aqui, é o bicondicional. Primeiro, devemos analisar os condicionais “ $p \rightarrow q$ ” e “ $r \rightarrow t$ ”, para, depois, considerar o bicondicional entre eles.

5.4 Tautologia, contradição e contingência.

Há sentenças proposições compostas que assumem sempre o mesmo valor (ou V ou F), independentemente dos valores lógicos que são atribuídos às proposi-

ções simples que a compõem. Outras dependem da atribuição desses valores. Costumamos classificar uma proposição composta em:

- I. **Tautologia**, quando é sempre verdadeira;
- II. **Contradição**, quando é sempre falsa;
- III. **Contingência**, quando seu valor depende dos valores das proposições que a compõem.

A seguir, veja exemplos que ilustram cada um desses tipos de proposições.

★ EXEMPLO

Exemplo 5.19

A proposição $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ é uma **tautologia**, pois é sempre verdadeira, independentemente dos valores das proposições p , q e r . Veja sua tabela-verdade.

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r) \vee (p \rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	F	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Exemplo 5.20

A proposição $(p \vee q) \vee (p \vee \sim q) \vee (\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee \sim q)$, independentemente dos valores lógicos de p e q , é sempre falsa. É, portanto, uma **contradição**. Veja sua tabela-verdade.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$p \vee \sim q$	$\sim p \vee q$	$\sim p \vee \sim q$	$(p \vee q) \vee (p \vee \sim q) \vee (\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee \sim q)$
V	V	F	F	V	V	V	F	F
V	F	F	V	V	V	F	V	F
F	V	V	F	V	F	V	V	F
F	F	V	V	F	V	V	V	F

Exemplo 5.21

A proposição $p \vee \sim r \rightarrow q \vee \sim r$ tanto pode ser falsa como verdadeira. Seu valor veritativo depende dos valores das proposições p , q e r . Ela é, portanto, uma **contingência** ou **indeterminação**. Observe, em sua tabela-verdade, como diferentes atribuições a p , q e r podem alterar o valor da proposição composta.

p	q	r	$\sim r$	$p \vee \sim r$	$q \vee \sim r$	$p \vee \sim r \rightarrow q \vee \sim r$
V	V	V	F	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	F	F

5.5 Equivalências lógicas

Como acontece com as expressões matemáticas (numéricas e/ou algébricas), as expressões lógicas podem, muitas vezes, ser substituídas por sentenças equivalentes mais simples (compostas por menos proposições e conectivos), facilitando sua interpretação e utilização. Nesta seção, serão apresentadas sentenças equivalentes e também sentenças que apresentam uma relação de implicação (que não são exatamente equivalentes, mas a ocorrência de uma implica a ocorrência da outra). Uma relação de equivalência é uma relação de bi-implicação. Ou seja, duas proposições p e q são equivalentes se p implica q e se q implica p .

Antes de iniciarmos o estudo de implicação e equivalência, veremos algumas definições que nos serão úteis.

Duas proposições são denominadas **independentes** quando, em suas tabelas-verdade, ocorrem as quatro alternativas: FF, FV, VF, VV.



EXEMPLO

Exemplo 5.22

As proposições p e q são independentes, pois, como podemos ver em sua tabela-verdade abaixo, temos os casos: FF, FV, VF, VV.

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Duas proposições são **dependentes** quando, em suas tabelas-verdade, uma ou mais alternativas não ocorrem. Note que as proposições p e $q \Rightarrow p$ são independentes, pois

p	q	$q \Rightarrow p$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Observe que não ocorre a alternativa VF.

Quando duas proposições têm uma relação de dependência, esta pode ser de **implicação** ou de **bi-implicação**, como definiremos a seguir.

5.6 Proposições associadas a um condicional: argumentos válidos e regras de inferência

Nas relações de implicação, como, por exemplo, $p \Rightarrow q$ (lê-se: “ p implica q ”), se p é verdadeira, então q também é, ou seja, o condicional $p \rightarrow q$ é verdadeiro, o que significa dizer que não ocorre o caso VF. Nesse caso, não podemos dizer que as proposições p e q são equivalentes, pois a ocorrência de p implica q , mas isso não significa dizer que a ocorrência de q implica p .

Há que se destacar, aqui, que o símbolo “ \rightarrow ” denota uma operação entre duas proposições, gerando uma nova proposição. Já o símbolo “ \Rightarrow ” é utilizado para mostrar a relação existente entre duas proposições.



EXEMPLO

Exemplo 5.23

Considere as sentenças abertas p : " $x + 3 = 7$ " e q : " $x = 4$ ".

Se considerarmos, nesse caso, o condicional

$$p \rightarrow q,$$

podemos concluir que ele é verdadeiro.

Quando isso ocorre, dizemos que **p implica q** , que representamos na forma $p \Rightarrow q$.

A **implicação** é bastante utilizada na definição de **argumentos válidos**.

Um **argumento válido** é uma sequência de proposições $p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, na qual sempre que as premissas p_1, p_2, \dots, p_n são verdadeiras, a conclusão p_{n+1} também é verdadeira. Isto é, a conjunção das premissas implica a conclusão.

Um argumento válido pode ser representado por

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \Rightarrow p_{n+1}$$

ou

$$p_1, p_2, \dots, p_n \Rightarrow p_{n+1}$$

ou, ainda

$$p_1$$

$$p_2$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$\frac{p_n}{p_{n+1}}$$

$$p_{n+1}$$

A verificação da validade de um argumento pode ser feita através do uso de tabela-verdade ou através da utilização de **regras de inferência**.

Primeiro, vamos ver um exemplo com a utilização da tabela-verdade. E, para isso, devemos, primeiramente, analisar a **conjunção** das premissas para, depois, verificar se é verdadeiro o condicional em que essa conjunção é o antecedente e a **conclusão** é o conseqüente. Em outras palavras, um argumento é considerado **válido** se o **condicional** entre a conjunção das premissas e a conclusão, nessa ordem, for uma **tautologia**.

Exemplo 5.24

Vamos verificar a validade do argumento $p \vee q, \sim p \Rightarrow q$.

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \vee \sim p$	$(p \vee q) \vee \sim p \rightarrow q$
V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V

Note que quando as premissas $p \vee q$ e $\sim p$ são verdadeiras, a conclusão q também é. Isso equivale a mostrar que o **condicional** $(p \vee q) \vee \sim p \rightarrow q$ é uma **tautologia** (é sempre verdadeiro).

O uso da tabela-verdade torna-se menos viável à medida que o número de proposições simples envolvidas na análise aumenta. Imagine, por exemplo, um argumento em que as premissas têm 5 proposições simples envolvidas. A tabela-verdade, nesse caso, terá $25 = 32$ linhas.

Por esse motivo, utilizamos uma alternativa mais viável e apropriada para a análise da validade de argumentos, que é a utilização das **regras de inferência**. Elas são argumentos simples válidos. A seguir são apresentadas as regras de inferência mais utilizadas. Todas elas podem ser provadas através do uso de tabela-verdade. Fica como sugestão, portanto, que você monte a tabela-verdade de cada argumento apresentado.

Regras de inferência

União (U): $p, q \Rightarrow p \wedge q$

Modus Ponens (MP): $p \rightarrow q, p \Rightarrow q$

Modus Tollens (MT): $p \rightarrow q, \sim q \Rightarrow \sim p$

Adição (A): $p \Rightarrow p \vee q$

Simplificação (S): $p \wedge q \Rightarrow p$

Silogismo Hipotético (SH): $p \rightarrow q, q \rightarrow r \Rightarrow p \rightarrow r$

Silogismo Disjuntivo (SD): $p \vee q, \sim p \Rightarrow q$

Simplificação Disjuntiva (S_+): $p \vee r, p \vee \sim r \Rightarrow p$

Exemplo 5.25

Vamos analisar e provar a validade do argumento seguinte através da utilização de regras de inferência.

$p, q, p \vee q \rightarrow \sim r, r \vee t, t$

As premissas são p , q , $p \vee q \rightarrow \sim r$, $r \vee t$ e a conclusão é t . Vamos dispor as premissas e, a partir delas, obter outras proposições utilizando as regras de inferência até chegarmos à conclusão r .

1) p	5) $p \vee q$	(U, 1 e 2)
2) q	6) $\sim r$	(MP, 3 e 4)
3) $p \vee q \rightarrow \sim r$	7) t	(SD, 4 e 6)
4) $r \vee t$		

No procedimento realizado acima, repare que, primeiramente, dispomos as premissas (linhas 1 a 4) e, a partir delas, aplicando as regras de inferência adequadas obtemos outras proposições até chegarmos à conclusão (linha 7).

5.6.1 Leis de equivalência

As regras de inferência, que acabamos de ver, não se configuram como equivalências lógicas. Em outras palavras, dizer que A implica B ($A \Rightarrow B$) não significa que, necessariamente, B implica A ($B \Rightarrow A$). Uma equivalência lógica entre duas proposições A e B é uma bi-implicação entre tais proposições, isto é, A implica B e B implica A .

Uma proposição **p é equivalente a uma proposição A ($A \Rightarrow B$)**, quando não ocorre VF e nem FV na combinação das tabelas verdades de ambas. Isso significa dizer que suas tabelas verdades são iguais. Também podemos afirmar que A equivale a A se, e somente se, o bicondicional **$A \leftrightarrow B$** for uma tautologia.



EXEMPLO

Exemplo 5.26

Vamos verificar se $\sim(\sim p \vee \sim q)$ e $p \wedge q$ são sentenças equivalentes.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim(\sim p \vee \sim q)$	$p \wedge q$
F	F	V	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
V	V	F	F	F	V	V

Note que nas colunas em destaque não ocorrem os casos VF e nem FV. Concluímos, portanto, que $p \wedge q \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$.

Também podemos construir a tabela-verdade do bicondicional $\sim(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow p \wedge q$ para mostrar que se trata de uma tautologia, como na tabela a seguir.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim(\sim p \vee \sim q)$	$p \wedge q$	$\sim(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow p \wedge q$
F	F	V	V	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F	F	V
V	V	F	F	F	V	V	V

A seguir, são apresentadas algumas regras de equivalência. Você pode provar cada uma delas através da construção da tabela-verdade envolvendo os dois lados da bi-implicação.

Regras de Equivalência

Dupla Negação: $\sim(\sim A) \Leftrightarrow A$

Leis Comutativas: (a) $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

(b) $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$

Leis Associativas: (a) $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$

(b) $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$

Leis Idempotentes: (a) $A \vee A \Leftrightarrow A$

(b) $A \wedge A \Leftrightarrow A$

Leis Distributivas: (a) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

(b) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Leis de Morgan: (a) $\sim(A \wedge B) \Leftrightarrow \sim A \vee \sim B$

(b) $\sim(A \vee B) \Leftrightarrow \sim A \wedge \sim B$

Eliminação de Condicionais: (a) $A \rightarrow B \Leftrightarrow \sim(A \wedge \sim B)$

(b) $A \rightarrow B \Leftrightarrow \sim A \vee B$

Eliminação de Bicondicionais:

$$(a) A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\sim A \wedge \sim B)$$

$$(b) A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (\sim A \vee B) \wedge (\sim B \vee A)$$

Tautologias e Contradições: (a) $A \wedge V \Leftrightarrow A$ (c) $A \wedge F \Leftrightarrow F$ (e) $A \wedge \sim A \Leftrightarrow F$

$$(b) A \vee V \Leftrightarrow V \quad (d) A \vee F \Leftrightarrow A \quad (f) A \vee \sim A \Leftrightarrow V$$

A seguir, vamos ver dois exemplos em que podemos provar a equivalência entre proposições através do uso de algumas das regras descritas acima.

Exemplo 5.27

A equivalência $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow q \vee r$ pode ser demonstrada da seguinte forma: partimos da proposição " $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ " e, aplicando as regras de equivalência adequadas, devemos chegar à proposição " $p \rightarrow q \vee r$ ".

$$\begin{aligned}(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) &\Leftrightarrow (\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee r) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim p) \vee (q \vee r) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sim p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow p \rightarrow (q \vee r)\end{aligned}$$

As propriedades utilizadas na demonstração acima foram, respectivamente, eliminação de condicional, comutativa e associativa, idempotente e eliminação de condicional.

Exemplo 5.28

Vamos demonstrar a equivalência: $\sim(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$.

$$\sim(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee q) \Leftrightarrow \sim(\sim p) \wedge \sim q \Leftrightarrow p \wedge \sim q$$

As propriedades utilizadas na demonstração acima foram, respectivamente, *eliminação de condicional*, *lei de Morgan* e *dupla negação*.

5.7 Álgebra de Boole aplicada à construção de tabelas-verdade

De forma geral, consideramos a Álgebra como a parte da matemática em que são introduzidas variáveis (representadas por letras) que representam os números, para generalizar os processos aritméticos. Nela, as variáveis podem assumir qualquer valor numérico real ou de um subconjunto real.

Em 1854, o matemático inglês George Boole, publicou o livro “Investigação das leis do pensamento” em que apresentava um tratamento de aplicação de fórmulas matemáticas para descrever operações de lógica e de probabilidades. Tais fórmulas são base das atuais operações internas do computador.

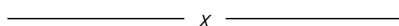
Sua obra foi fundamental ao desenvolvimento do que hoje chamamos **álgebra de Boole** ou **álgebra booleana**, em sua homenagem. Nesse tipo de álgebra, as variáveis assumem somente dois valores: 0 ou 1, que equivalem, respectivamente, a falso ou verdadeiro.

Em razão da sua aplicação no estudo de **circuitos de chaveamento**, a álgebra booleana também é conhecida como **álgebra de chaveamento** ou **álgebra dos interruptores**. Ela é utilizada em projetos de circuitos de chaveamento com relés que hoje aplicam-se aos projetos de circuitos elétricos e eletrônicos dos computadores digitais.

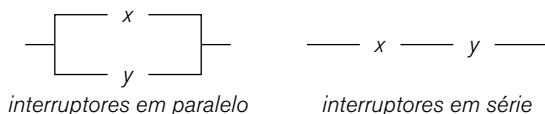
Um **interruptor** (ou **chave**) é um dispositivo ligado a um ponto de um circuito elétrico, como mostrado na figura seguinte. Ele assume somente dois estados: **fechado** ou **aberto**, que representamos respectivamente por **1** e **0**.



Cada interruptor é representado por uma letra (variável), como na figura seguinte.



Dados dois interruptores, x e y , em um circuito, eles podem estar ligados em série ou em paralelo. Veja a representação das duas situações na figura a seguir.



Quando consideramos uma ligação em paralelo dos interruptores, a corrente não passará pelo circuito somente se os dois interruptores estiverem abertos, isto é, se $x = 0$ e $y = 0$. Se pelo menos um deles estiver fechado, a corrente passará pelo circuito.

Para representar as situações possíveis num chaveamento em paralelo, podemos utilizar uma tabela como a apresentada a seguir. Na coluna “resultado”, o valor “0” indica que a corrente não passa pelo circuito e o valor “1” indica que a corrente passa pelo circuito.

x	y	Resultado
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Observe que os resultados desse tipo de ligação obedecem à mesma lei de determinação dos valores lógicos de uma **disjunção**, se considerarmos que “1” equivale a “V” e “0” equivale a “F”. Na álgebra booleana esse tipo de operação é denominada **soma lógica** e é representada pelo operador “+”. Considerando, então, os possíveis estados de dois interruptores x e y ligados em **paralelo**, podemos notar que:

Quando a ligação é em série, a corrente só passará pelo circuito se os dois interruptores estiverem fechados, isto é, se $x = 1$ e $y = 1$. Se pelo menos um deles estiver aberto, a corrente não passará pelo circuito. Essa operação é denominada **multiplicação lógica** na álgebra booleana e é representada pelo operador “.”.

A tabela a seguir mostra os resultados possíveis quando consideramos dois interruptores x e y ligados em série.

x	y	Resultado
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

No caso desta última tabela, os resultados apresentados obedecem à mesma lei de determinação da **conjunção**. Considerando, então, os possíveis estados de dois interruptores x e y ligados em **série**, podemos notar que:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 &= 1; \\ 1 \cdot 0 &= 0; \\ 0 \cdot 1 &= 0; \\ 0 \cdot 0 &= 0. \end{aligned}$$

Outra semelhança entre os **conectivos lógicos** (que vimos no estudo da lógica matemática) e os **operadores lógicos** da álgebra booleana refere-se à

negação, que aqui trataremos como **complementação**. No estudo dos interruptores, há situações em que o fato de um interruptor estar aberto implica no outro estar fechado, e vice-versa. Ou seja, se o valor de um deles é “0”, o do outro é “1”. Se de um é “0”, o do outro é “1”. Isso é o que se observa quando analisamos uma proposição e a sua negação.

Na álgebra booleana, o **complementar** de uma variável x é representada por x' ou $\neg x$ ou, ainda, \bar{x} .

Essa compatibilidade entre as aplicações da álgebra booleana no estudo dos interruptores e os conectivos lógicos nos permite estender os resultados obtidos na lógica matemática aos operadores que acabamos de ver (*soma lógica, multiplicação lógica e complementação*). Se utilizamos, por exemplo, as equivalências lógicas para simplificar proposições (obter proposições equivalentes mais simples), podemos utilizar as mesmas leis para simplificar circuitos.

Podemos, portanto, “reescrever” as regras de equivalência apresentadas na seção anterior para os operadores da álgebra booleana. Veja a seguir.

Propriedades dos Operadores da Álgebra Booleana

$(x')' = x$ (complementar do complementar)

$x + y = y + x$ (comutativa)

$x \cdot y = y \cdot x$ (comutativa)

$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (associativa)

$x + (y + z) = (x + y) + z$ (associativa)

$x + x = x$ (idempotência)

$x \cdot x = x$ (idempotência)

$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ (distributiva)

$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$ (distributiva)

$(x + y)' = x' \cdot y'$ (complementar da soma)

$(x \cdot y)' = x' + y'$ (complementar da multiplicação)

$x + 1 = 1$

$x + 0 = x$

$x + x' = 1$

$x \cdot 1 = x$

$x \cdot 0 = 0$

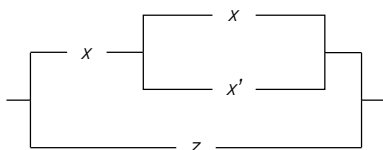
$x \cdot x' = 0$

Veja um exemplo de aplicação de algumas dessas propriedades na simplificação de circuitos.

★ EXEMPLO

Exemplo 5.29

Considere o circuito seguinte:



Podemos representá-lo, algebricamente, na forma:

$$x \cdot (y + x') + z$$

Uma representação equivalente quando se trata de cálculo proposicional é:

$$x \wedge (y \vee \sim x) \vee z$$

Se aplicarmos a lei distributiva (da conjunção em relação à disjunção) na expressão " $x \wedge (y \vee \sim x)$ ", podemos reescrever a sentença acima como:

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge \sim x) \vee z$$

Como " $(x \wedge \sim x)$ " é uma contradição, então a disjunção acima depende apenas dos valores lógicos das demais proposições que a integram. Sendo assim, podemos escrever:

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge \sim x) \vee z \Leftrightarrow (x \wedge y) \vee F \vee z \Leftrightarrow (x \wedge y) \vee z$$

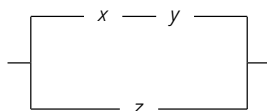
Isso significa que a proposição $x \wedge (y \vee \sim x) \vee z$ é equivalente a:

$$(x \wedge y) \vee z$$

De forma semelhante, podemos mostrar esse processo para a fórmula booleana $x \cdot (y + x') + z$. Veja:

$$x \cdot (y + x') + z = (x \cdot y) + (x \cdot x') + z = (x \cdot y) + 0 + z = (x \cdot y) + z.$$

Sendo assim, uma representação gráfica equivalente à apresentada no início deste exemplo é:



ATIVIDADE

01. Considere os seguintes raciocínios abaixo e identifique os que são considerados dedutivos:

- Todo aluno é inteligente.*
Nenhum inteligente é fanático.
Logo, há alunos fanáticos.
- Toda função contínua é derivável.*
Então, toda função derivável é contínua.
- Todo aluno estudioso é aprovado.*
Daniel foi aprovado.
Logo, ele é estudioso.
- Há brasileiros que moram na Europa.*
Daniel mora na Europa.
Então, ele é brasileiro.

02. Considere as sentenças p : “Alessandra é bonita” e q : “Alessandra é charmosa”, escrever na linguagem simbólica as seguintes proposições:

- Alessandra é bonita ou charmosa.
- Não é verdade que Alessandra não é bonita ou que não é charmosa.
- Alessandra não é bonita, mas não é charmosa.
- Se Alessandra é bonita então ela é charmosa.
- Alessandra é bonita se, e somente se, é charmosa.
- Não é verdade que Alessandra não é bonita e que não é charmosa.

03. Dadas as proposições p : “Aurélio joga basquete”, q : “Flávia joga vôlei” e r : “Marcelo pratica natação”, escreva na linguagem usual as proposições descritas a seguir:

- $p \wedge q$
- $p \vee r$

- c) $r \rightarrow q$
- d) $r \rightarrow (q \vee p)$
- e) $p \wedge \sim q$
- f) $\sim (p \wedge r)$
- g) $\sim (\sim q)$
- h) $q \leftrightarrow \sim r$

04. Construa a tabela-verdade de cada uma das proposições abaixo:

- a) $(p \wedge q) \wedge r$
- b) $p \wedge q \wedge r$
- c) $r \rightarrow q$
- d) $\sim r \vee q$
- e) $\sim r \vee q$
- f) $(p \wedge \sim q) \rightarrow q$
- g) $(p \wedge \sim q) \rightarrow q \llcorner r$
- h) $(\sim q \vee p) \leftrightarrow (q \wedge \sim r)$
- i) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \vee \sim (p \leftrightarrow q)$
- j) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee r) \wedge (p \vee t)$

05. A partir do valor veritativo fornecido em cada item, determine os valores lógicos das proposições compostas:

- a) $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow \sim r)$, sabendo que p é falsa;
- b) $q \wedge [\sim q \rightarrow (q \vee t)]$, sabendo que q é falsa;
- c) $(p \rightarrow r) \wedge (r \vee t)$, sabendo que r é verdadeira;
- d) $p \rightarrow (s \vee t)$, sabendo que s é verdadeira;

06. Determine $V(p)$, $V(q)$ e $V(r)$ em cada item abaixo, a partir das informações dadas:

- a) $V(p \wedge q) = 1$ e $V(r \wedge q) = 0$;
- b) $V(p \rightarrow r) = 0$ e $V(r \vee q) = 1$;
- c) $V(p \vee q) = 0$ e $V(r \rightarrow q) = 1$;
- d) $V(p \leftrightarrow q) = 0$, $V(r \rightarrow q) = 1$ e $V(\sim r) = 0$.

07. Teste a validade dos seguintes argumentos, utilizando as regras de inferência:

- a) $p \rightarrow \sim q, p \vee \sim q, q, \sim p$
- b) $t \rightarrow r, \sim r, t \vee s, s$

08. Dê o nome de cada um dos seguintes argumentos:

a) *Hoje é sábado ou domingo.*

Hoje não é domingo.

Portanto, hoje é sábado.

b) *Se Flávia diz a verdade então Roni mente.*

Se Roni mente então Juliana não foi à festa.

Portanto, se Flávia diz a verdade, então Juliana não foi à festa.

09. (ANPAD – Fevereiro de 2007). Considere a proposição “*Não é verdade que, se Maria não é elegante, então ela é inteligente*”. Uma proposição logicamente equivalente é:

a) “*Maria é elegante ou é inteligente*”.

b) “*Maria é elegante e não é inteligente*”.

c) “*Maria não é elegante e é inteligente*”.

d) “*Maria não é elegante e nem é inteligente*”.

e) “*Maria não é elegante ou não é inteligente*”.

10. Utilizando as leis de equivalência, demonstre as seguintes relações de bi-implicação:

a) $A \wedge B \rightarrow C \Leftrightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C)$

b) $\sim((p \vee q) \wedge r) \Leftrightarrow \sim(p \wedge r) \wedge (\sim q \vee \sim r)$

c) $\sim(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow p \leftrightarrow \sim q$

d) $A \wedge (\sim A \vee B) \Leftrightarrow A \wedge B$

e) $A \rightarrow (B \rightarrow C) \Leftrightarrow C \rightarrow (A \rightarrow \sim B)$



REFLEXÃO

A análise formal de proposições é um bom exercício de aprimoramento do seu senso de argumentação. Ela nos ajuda, inclusive, a levantar certas hipóteses e também auxilia na análise das mesmas quando à sua veracidade.

A língua que utilizamos para nos comunicar, por vezes, nos leva a construções que podem ter mais do que um sentido. Na linguagem lógica, isso não acontece. Toda proposição, como vimos, ou é verdadeira ou é falsa. Não há meio termo. E o uso dessa linguagem nos permite realizar análises conclusivas a respeito de hipóteses que são levantadas.

Além disso, os fundamentos da Lógica Matemática sempre influenciaram a linguagem computacional, como, por exemplo, no campo da Inteligência Artificial. As tecnologias utilizadas

para automatizar inferências lógicas têm um grande potencial para resolver problemas e chegar a conclusões a partir de fatos.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABE, J. M.; SCALZITTI, A.; SILVA FILHO, J. I. **Introdução à lógica para Ciência da Computação.**

São Paulo: Arte e Ciência, 2001.

ALENCAR FILHO, E. de. **Iniciação à lógica matemática.** 22ª ed São Paulo: Nobel, 2003.

DAGHLIAN, J. **Lógica e álgebra de Boole.** 4ª ed. São Paulo: Atlas, 1995.

NOLT, J.; RHATYN, D. **Lógica.** Makron Books do Brasil, 1991

SÉRATES, J. **Raciocínio lógico:** lógico matemático, lógico quantitativo, lógico numérico, lógico analítico, lógico crítico. 8ª ed. Brasília: Jonofon Ltda, 1998.

6

Cálculo de predicados e métodos de demonstração

6. Cálculo de predicados e métodos de demonstração

No capítulo anterior tivemos os valores lógicos de proposições como objeto principal de nosso estudo. Uma proposição, como vimos, é uma sentença que pode ser classificada como verdadeira ou falsa. Dizer, por exemplo, que “o número 2 é primo” é referir-se a uma proposição verdadeira. Mas, se trocarmos, nessa proposição, o número “2” por um número x qualquer? Nossa afirmação, agora, passa a ser “o número x é primo”. Como saber, então, se essa sentença é verdadeira ou falsa?

Nesse caso, temos uma sentença aberta (que já foi definida no capítulo anterior) cujo valor lógico depende da atribuição que se faz à variável x . Sentenças como esta são denominadas **predicados**. Neste capítulo, trataremos, essencialmente, do **cálculo de predicados**, que são processos envolvendo esses tipos de sentenças.

Além disso, também serão abordadas algumas técnicas de demonstração associadas ao cálculo proposicional e ao cálculo de predicados.



OBJETIVOS

- Identificar conjuntos, universo e verdade de sentenças abertas;
- Identificar e aplicar os quantificadores a sentenças abertas;
- Indicar as negações de proposições com quantificadores;
- Identificar a estrutura de um argumento;
- Reconhecer um argumento válido e um argumento inválido;
- Demonstrar argumentos de forma direta;
- Demonstrar argumentos adequados pelo método da demonstração condicional;
- Fazer a demonstração de argumentos, usando a demonstração por absurdo.

6.1 Predicados, conjunto universo e conjunto verdade

No capítulo anterior tratamos do cálculo proposicional, isto é, dos processos lógicos envolvendo proposições unidas por conectivos lógicos. E muito do que já foi tratado será utilizado neste capítulo. No entanto, aqui utilizaremos **predicados** no lugar de **proposições**. E qual é a diferença entre esses dois conceitos?

Vimos que toda sentença declarativa que pode ser classificada como verdadeira ou falsa constitui uma proposição. Quando afirma-se, por exemplo, que

“3 é um número natural”, temos condições de verificar que trata-se de uma afirmação verdadeira. Ou mesmo quando afirmamos que “Larissa é atleta”, por exemplo, mesmo que eu não a conheça, há alguém, em algum lugar, que pode dizer se ela é realmente atleta ou não. Então, esta sentença também é uma proposição.

Mas, quando nos referimos a um conjunto de números ou coleção de pessoas ou elementos e não a um valor ou a alguém especificamente, essas sentenças deixam de ser consideradas proposições. Se afirmarmos “ x é um número natural” ou “ x é atleta” não temos como avaliar a veracidade dessas sentenças. São sentenças abertas que denominamos **predicados**. A letra x (pode ser utilizada qualquer outra) representa a **variável** do predicado.

Representamos, de forma geral, um **predicado** por qualquer letra maiúscula do nosso alfabeto. Se a variável envolvida é representada por x , então o predicado pode ser indicado por $P(x)$.

Ao conjunto de possibilidades lógicas que a variável x pode assumir em uma sentença aberta denominamos **conjunto universo** e o indicamos como U_x ou, simplesmente, U .

Outro conjunto que está associado ao estudo de predicados é o **conjunto verdade**, que é o conjunto que contém o(s) elemento(s) que, ao substituir a variável x , torna(m) a sentença verdadeira. Esse conjunto é notado como V_x ou V .

O exemplo a seguir mostra como são definidos os conjuntos universo e verdade de uma sentença e como a escolha do conjunto universo pode interferir na determinação do conjunto verdade.



EXEMPLO

Exemplo 6.1

Considere a sentença “ $x + 3 < 5$ ”.

Trata-se de uma sentença aberta, pois envolve a variável x , isto é, a determinação de seu valor lógico depende dos valores que são atribuídos a x . Podemos representá-la na forma:

$$P(x): x + 3 < 5.$$

Para determinar seu conjunto verdade V é preciso, antes, definir o conjunto universo U . Se considerarmos

$$U = \mathbb{N},$$

o conjunto verdade será dado por

$$V = \{0, 1\}$$

Note que, dentre os números naturais, somente o “0” e o “1” satisfazem $P(x)$.

Mas, o que acontece se definirmos outro conjunto universo?

Considere, agora,

$$U = \mathbb{Z}.$$

Observe que, além dos valores “0” e “1” (que também são inteiros), todos os inteiros negativos também satisfazem a sentença $P(x): x + 3 < 5$. Dessa forma, temos:

$$V = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1\} \text{ ou } V = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 1\}.$$

6.2 Quantificadores

Em muitas das sentenças abertas que abordamos no cálculo de predicados, é comum encontrarmos expressões tais como “tudo”, “todo”, “para todo”, “qualquer que seja”, “existe”, “existe um único”, entre outras, que são denominadas quantificadores. Os dois tipos de **quantificadores** que estudaremos, neste capítulo, são:

- **universal** (para todo, todo, qualquer que seja);
- **existencial** (existe, existe um único).

O símbolo “ \forall ” é chamado de **quantificador universal** e utilizado para exprimir o fato de que **para todo x em um dado conjunto, a sentença $P(x)$ é verdadeira**. Simbolicamente, temos “ $\forall x, P(x)$ ”.



EXEMPLO

Exemplo 6.2

A sentença “Todo número natural é inteiro” pode ser escrita, na linguagem simbólica, como $\forall x, x \in \mathbb{N} \rightarrow x \in \mathbb{Z}$ (lê-se: “para todo x pertencente a \mathbb{N} , temos x pertencente a \mathbb{Z} ” ou “qualquer que seja x pertencente a \mathbb{N} , temos x pertencente a \mathbb{Z} ”).

Outras formas de representar essa sentença são:

$$P(x): x \in \mathbb{Z}$$

$$\forall x, x \in \mathbb{N}, P(x)$$

ou

$$P(x): x \in \mathbb{Z}$$
$$(\forall x \in \mathbb{N})(P(x))$$

O **conjunto universo** desta sentença é o conjunto dos números naturais ($U = \mathbb{N}$). E essa sentença é verdadeira, pois qualquer valor natural que atribuímos a x , teremos satisfeita a condição $P(x): x \in \mathbb{Z}$. Isso porque sabemos que os números naturais são também números inteiros.

O **conjunto verdade** dessa sentença quantificada é, portanto, $V = \mathbb{N}$.

As sentenças quantificadas com o **quantificador universal** são verdadeiras somente quando o **conjunto universo** e o **conjunto verdade** são iguais.

O símbolo “ \exists ”, chamado **quantificador existencial**, é utilizado para expressar que **para um ou mais elementos de um dado conjunto a proposição $P(x)$ é verdadeira**. Sentenças do tipo “Existe x tal que $P(x)$ ” ou “existe pelo menos um x tal que $P(x)$ ” ou, ainda, “para algum x ocorre $P(x)$ ” podem ser escritas, na forma simbólica, como: $\exists x, P(x)$.

Exemplo 6.3

Considere a proposição: “ $\exists x, 5x + 10 = 0$ ”, com $U = \mathbb{Z}$. Ela é verdadeira, pois, para $x = -2$, a equação “ $5x + 10 = 0$ ” é verdadeira. Portanto, existe um valor de x que satisfaz a condição apresentada. O conjunto verdade é, portanto, $V = \{2\}$.

Se o conjunto verdade fosse vazio, concluiríamos que a sentença quantificada seria falsa.

Exemplo 6.4

Considere novamente a sentença: “ $\exists x, 5x + 10 = 0$ ”, mas, com $U = \mathbb{Z}$. Observe que, nesse caso, a sentença quantificada é falsa, pois o único valor real que satisfaz a condição apresentada é o “ -2 ”, que não é um elemento pertence ao universo (não é um número natural). Temos, portanto, $V = \emptyset$.

Quando a condição $P(x)$ refere-se a valores numéricos e o conjunto universo não é explicitado, consideramos $U = \mathbb{R}$. Veja um exemplo.

Exemplo 6.5

Seja $P(x) = x + 3 \geq 5$. Vamos determinar o conjunto verdade de cada uma das sentenças dadas abaixo:

a) $\exists x, P(x)$

b) $\forall x, P(x)$

Como não foi definido o conjunto universo, consideramos $U = \mathbb{R}$. Dessa forma, a sentença $P(x)$ tem como conjunto verdade $V = [2, \infty[$.

Como V é um conjunto não vazio, concluímos que a sentença quantificada do item (a) é verdadeira. Mas como $V \neq U$, concluímos que a sentença quantificada do item (b) é falsa, pois, nem todos os elementos do universo satisfazem a condição $P(x)$.

Sentenças quantificadas também podem ser expressas através da disjunção ou conjunção de proposições. Veja a seguir.

A sentença quantificada " $\forall x, P(x)$ ", considerando como conjunto universo $U = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, é equivalente à **conjunção**

$$P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)$$

Na linguagem simbólica, escrevemos:

$$\forall x, P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)$$

Com relação ao quantificador existencial, também conseguimos estabelecer relação semelhante. Veja.

A sentença quantificada " $\exists x, P(x)$ ", considerando como conjunto universo $U = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, é equivalente à **disjunção**

$$P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n)$$

Na linguagem simbólica, escrevemos:

$$\exists x, P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n)$$

Outro recurso bastante utilizado no cálculo de predicados refere-se à negação de sentenças quantificadas. Observe os exemplos a seguir. Neles, veremos como realizar essa negação para os dois tipos de quantificadores e, a partir deles, serão feitas as generalizações desses recursos.

Exemplo 6.6

Considere o conjunto A de todos os brasileiros. Este é o conjunto universo de nosso estudo. Considere $x \in A$. A sentença quantificada " $\forall x, x$ fala inglês" nos diz que "*todo brasileiro fala inglês*". Já a sentença quantificada " $\exists x, x$ fala inglês" significa que "*existe pelo menos um brasileiro que fala inglês*". Note que são sentenças diferentes: a primeira só pode ser considerada verdadeira se seu conjunto verdade for igual ao conjunto universo, ou seja, se todo brasileiro falar inglês; a segunda será verdadeira se pelo menos um brasileiro falar inglês.

Agora, vamos considerar a negação da primeira sentença: "todo brasileiro fala inglês". Ela pode ser representada por

$$\sim(\forall x, x \text{ fala inglês}),$$

e, na linguagem natural, pode ser expressa, por exemplo, como "*nem todo brasileiro fala inglês*" ou "*não é verdade que todo brasileiro fala inglês*". Observe que negar uma sentença com quantificador universal (como é o caso dessa) não é equivalente a negar simplesmente a sentença aberta, isto é, a negação

$$\sim(\forall x, x \text{ fala inglês})$$

não é equivalente a

$$\forall x, x \text{ não fala inglês}.$$

Analisando pela linguagem natural, não é difícil perceber que "*não é verdade que todo brasileiro fala inglês*" não significa que "*todo brasileiro não fala inglês*". Essas sentenças têm sentidos bem diferentes.

Agora, compare as sentenças "*todo brasileiro fala inglês*" e sua negação "*nem todo brasileiro fala inglês*" (ou "*não é verdade que todo brasileiro fala inglês*"). Note que a negação apresentada pode ser entendida que "**existe pelo menos um brasileiro que não fala inglês**". Isso nos dá a ideia de que a negação de uma sentença quantificada com o quantificador universal corresponde a outra sentença em que o quantificador existencial é aplicado em uma sentença em que a condição é negada. Na linguagem simbólica, podemos escrever:

$$\sim(\forall x, x \text{ fala inglês}) \Leftrightarrow \exists x, x \text{ não fala inglês}.$$

Se denotarmos por $P(x)$ a sentença "fala inglês", temos:

$$\sim(\forall x, P(x)) \Leftrightarrow \exists x, \sim P(x).$$

Vejamos, agora, que quando negamos uma sentença quantificada como o quantificador existencial, algo semelhante ocorre. Vamos considerar a sentença quantificada " $\exists x, x$ fala

inglês", isto é, "*existe pelo menos um brasileiro que fala inglês*". Sua negação, na linguagem corrente, pode ser dada por "*não existe nenhum brasileiro que fala inglês*" ou, de forma equivalente, "*qualquer que seja o brasileiro, ele não fala inglês*". Veja que, agora, podemos concluir que

$$\sim(\exists x, x \text{ fala inglês}) \Leftrightarrow "x, x \text{ não fala inglês}.$$

ou

$$\sim(\exists x, P(x)) \Leftrightarrow \forall x, \sim P(x).$$

Podemos comprovar as propriedades referentes às negações de sentenças quantificadas, apresentadas nesse exemplo, através da aplicação de certas leis de equivalência. E é isso que veremos a seguir.

Considere a sentença aberta $P(x)$ e o seu conjunto universo $U = \{a_1, a_2, a, \dots, a_n\}$. A sentença quantificada " $x, P(x)$ " equivale, como já vimos, à conjunção $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)$. Podemos, então, escrever:

$$\forall x, P(x) \wedge P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)$$

Dessa forma, podemos expressar sua negação na forma:

$$\sim(\forall x, P(x)) \Leftrightarrow \sim(P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n))$$

Aplicando uma das leis de Morgan (que refere-se à negação de uma conjunção), podemos escrever:

$$\sim(\forall x, P(x)) \Leftrightarrow \sim P(a_1) \vee \sim P(a_2) \vee \dots \vee \sim P(a_n)$$

Observe que a disjunção

$$\sim P(a_1) \vee \sim P(a_2) \vee \dots \vee \sim P(a_n)$$

é verdadeira se a condição $P(x)$ não ocorrer pelo menos para um elemento do conjunto universo, ou seja, se existe pelo menos um elemento do universo em que não ocorre $P(x)$. Isso nos leva a concluir que essa disjunção equivale a

$$\exists x, \sim P(x)$$

Portanto, de forma geral, podemos escrever:

$$\sim("x, P(x)) \vee \exists x, \sim P(x)$$

Agora, com relação à negação de uma sentença quantificada com o quantificador existencial, considere a sentença aberta $P(x)$ e o seu conjunto universo $U = \{a_1, a_2, a, \dots, a_n\}$. A sentença quantificada $\exists x, P(x)$ equivale à disjunção $P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n)$. Podemos, então, escrever:

$$\exists x, P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n)$$

Dessa forma, podemos expressar sua negação na forma:

$$\sim(\exists x, P(x)) \Leftrightarrow \sim(P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n))$$

Aplicando uma das leis de Morgan (que refere-se à negação de uma conjunção), podemos escrever:

$$\sim(\exists x, P(x)) \Leftrightarrow \sim P(a_1) \wedge \sim P(a_2) \wedge \dots \wedge \sim P(a_n)$$

A conjunção

$$\sim P(a_1) \wedge \sim P(a_2) \wedge \dots \wedge \sim P(a_n)$$

é verdadeira se a condição $P(x)$ não ocorrer para nenhum elemento do conjunto universo, ou seja, qualquer que seja o elemento considerado do conjunto universo $P(x)$ não ocorre. Isso nos leva a concluir que essa conjunção equivale à

$$\forall x, \sim P(x)$$

Portanto, de forma geral, podemos escrever:

$$\sim(\exists x, P(x)) \Leftrightarrow \forall x, \sim P(x)$$

Uma última definição que veremos nesta seção é a de alcance de um quantificador.

Quando associamos um quantificador a uma condição $P(x)$, esta define-se como o **alcance** (ou **escopo**) do quantificador.

Exemplo 6.7

Considere as sentenças

- a) $\forall x \in \mathbb{R} \ x + 3 < 0$;
- b) $\exists x, "y, (x + y) \in \mathbb{R}$

No item (a), o alcance do quantificador universal é " $x + 3 < 0$ ".

Observe que no item (b) há dois quantificadores. Podemos ler a sentença " $\exists x, \forall y, (x + y) \in \mathbb{R}$ " como "existe x , tal que para todo y , a soma $x + y$ é um valor real". Nesse caso, o alcance do quantificador existencial é " $\forall y, (x + y) \in \mathbb{R}$ ". Já o alcance do quantificador universal é " $(x + y) \in \mathbb{R}$ ".

6.3 Métodos de demonstração

As aplicações que fazemos de certas propriedades e teoremas matemáticos só é possível devido ao fato desses poderem ser generalizados para diversas situações. O **teorema de Pitágoras**, por exemplo, pode ser aplicado em qualquer triângulo retângulo ou na resolução de toda e qualquer situação-problema em que se deseja determinar a medida de um de seus catetos a partir da medida de sua hipotenusa e do outro cateto ou a medida de sua hipotenusa a partir das medidas de seus catetos. Sua validade está comprovada nessas condições.

No estudo da lógica, quando fazemos uma afirmação do tipo "*todo número natural é racional*", estamos considerando que tal propriedade aplica-se a todos os elementos do conjunto \mathbb{N} . Mas, a questão, agora, é como podemos validar (provar, demonstrar) esse resultado para todos os números naturais? Não temos, logicamente, como testar a propriedade diretamente para cada valor natural, pois são infinitos. No entanto, há formas de realizar esse tipo de prova de tal forma que se possa comprovar a veracidade da propriedade para todos os elementos de um conjunto. Para isso, contamos com alguns métodos de demonstração, que veremos a partir de agora.

Entende-se por **demonstração** ou **prova**, o processo de raciocínio lógico-dedutivo no qual, assumindo-se uma **hipótese** como verdadeira, deduz-se uma **tese** (resultado) através do uso de argumentos.

Já definimos, anteriormente, quando consideramos um **argumento válido**. Se partirmos de certas premissas, que são declarações tidas como verdadeiras, então podemos, através do uso de certas **regras de inferência** (ou equivalência), obter uma conclusão verdadeira. Dado um conjunto P de premissas p_1, p_2, \dots, p_n , verdadeiras, devemos concluir que a proposição Q também é verdadeira. Ou seja, devemos provar que **P implica Q** :

$$P \Rightarrow Q$$

Uma forma de provar um argumento deste tipo é considerar que o condicional

$$P \rightarrow Q$$

é verdadeiro. Isto equivale a provar que

$$P \Leftrightarrow p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n$$

é uma proposição verdadeira sempre que p_1, p_2, \dots, p_n , são verdadeiras.

Uma forma de demonstrar a validade desse tipo de argumento é através do uso de tabelas-verdade. Contudo, se a quantidade de premissas for grande, a tabela ficará muito extensa, tornando o processo extremamente exaustivo. Por isso, veremos alguns métodos que tornam o processo mais ágil.

Um **teorema** é uma afirmação que pode ser demonstrada como verdadeira, por meio de outras afirmações que já foram provadas, como outros teoremas ou os axiomas. Os teoremas, geralmente, ocupam posição de destaque no desenvolvimento de certa teoria. Entende-se por **prova** ou **demonstração** o processo em que se mostra que o teorema está correto.

Um **axioma** é considerado uma verdade inquestionável e universalmente válida. É, muitas vezes, utilizado como princípio na construção de uma teoria ou como base no processo de argumentação.

6.3.1 Prova direta

Esta técnica de demonstração já foi apresentada neste livro. Quando realizamos, no capítulo 5, a verificação da veracidade de argumentos através da aplicação das **regras de inferência** estávamos aplicando esse tipo de demonstração.

Considera-se que uma proposição **Q é formalmente dedutível** do conjunto **P** de premissas p_1, p_2, \dots, p_n se, e somente se, p_1, p_2, \dots, p_n, Q for um argumento válido.

Se a proposição **Q é formalmente dedutível**, ela é denominada um **teorema**.

Vamos ver dois exemplos em que se aplica a **prova direta** de teoremas. Para compreender os processos apresentados nesses exemplos é preciso recorrer às **regras de inferência** apresentadas no capítulo 5.

Tais regras são, novamente, apresentadas a seguir.

Regras de inferência

União (U): $p, q \Rightarrow p \wedge q$

Modus Ponens (MP): $p \rightarrow q, p \Rightarrow q$

Modus Tollens (MT): $p \rightarrow q, \sim q \Rightarrow \sim p$

Adição (A): $p \Rightarrow p \vee q$

Simplificação (S): $p \wedge q \Rightarrow p$

Silogismo Hipotético (SH): $p \rightarrow q, q \rightarrow r \Rightarrow p \rightarrow r$

Silogismo Disjuntivo (SD): $p \vee q, \sim p \Rightarrow q$

Simplificação Disjuntiva (S_+): $p \vee q, \sim p \Rightarrow q$



EXEMPLO

Exemplo 6.8

Vamos provar o argumento

$$q \wedge s, t \rightarrow \sim q, \sim t \rightarrow r, r \vee \sim s.$$

Isso equivale a provar que a proposição " $r \vee \sim s$ " é verdadeira sempre que " $q \wedge s$ ", " $t \rightarrow \sim q$ " e " $\sim t \rightarrow r$ " (ou a conjunção dessas proposições) forem verdadeiras.

Vamos, inicialmente, numerar as premissas. A partir delas, iremos obter novas proposições como resultado da aplicação das regras de inferências adequadas em uma ou mais dessas premissas. As regras aplicadas e as premissas sobre as quais essas regras estão sendo aplicadas estão indicadas, entre parênteses, ao lado da proposição resultante.

1. $s \wedge p$ (premissa)
2. $t \rightarrow \sim p$ (premissa)
3. $\sim t \rightarrow p$ (premissa)
4. q (simplificação em 1)
5. $\sim t$ (modus tollens em 2 e 4)
6. r (modus ponens em 3 e 5)
7. $r \vee \sim s$ (adição em 6)

Portanto, conseguimos provar o que desejávamos (linha 7).

Exemplo 6.9

Dadas as premissas:

1. se $x \neq 0$ então $x = y$;
2. se $x = y$ então $x = z$;
3. $x \neq z$,

vamos provar que $x = 0$.

Primeiramente, vamos escrever as proposições na forma simbólica. Podemos, por exemplo, tomar:

p : " $x = 0$ ";

q : " $x = y$ ";

r : " $x = z$ ".

Portanto, queremos provar " p " dadas as premissas:

1. $\sim p \rightarrow q$ (premissa)
2. $q \rightarrow r$ (premissa)
3. $\sim r$ (premissa)
4. $\sim q$ (modus tollens em 2 e 3)
5. p (modus tollens em 1 e 4)

Nesse tipo de demonstração, muitas vezes, é preciso experimentar alguns caminhos, aplicando as regras de necessárias. Nem sempre o resultado aparece de forma tão rápida.

6.3.2 Demonstração por redução ao absurdo

Naseçãoanterior,vimoscomodemonstrar,deformadireta,aimplicação" $P \Rightarrow Q$ ". Considerando que P é uma conjunção verdadeira de n proposições p_1, p_2, \dots, p_n , isto é

$$P \Leftrightarrow p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n$$

conseguimos, através da aplicação direta das regras de inferência e/ou outras leis lógicas, concluir que a proposição Q também é verdadeira (válida).

Agora, iremos demonstrar a mesma implicação " $P \Rightarrow Q$ " de uma forma indireta. Já vimos que se " $P \Rightarrow Q$ ", então o condicional " $P \rightarrow Q$ " é verdadeiro. Além

disso, através da lei de equivalência referente à eliminação do condicional, vista no capítulo anterior, podemos afirmar que

$$P \rightarrow Q \text{ e } \sim(P \wedge \sim Q)$$

são proposições equivalentes, isto é, têm valores lógicos iguais, que podemos representar como

$$V(P \rightarrow Q) = V(\sim(P \wedge \sim Q))$$

E é exatamente essa equivalência que nos permite utilizar o recurso de **demonstração por redução ao absurdo** na comprovação de argumentos válidos.

Ele consiste em, primeiramente, considerar a proposição **P verdadeira** e assumir (provisoriamente) como **falsa** a **conclusão Q** que se deseja provar, ou seja, nesse método de demonstração devemos supor que a negação da conclusão é verdadeira (ou que a conclusão é falsa).

Dessa forma, aplicando as regras necessárias de inferência ou outras leis da lógica sobre P e $\sim Q$, tentaremos chegar a uma **contradição**. Isso nos levará a concluir que a proposição P é falsa, ou que $\sim P$ é verdadeira. Neste ponto, ocorre um choque de declarações, já que assumimos, inicialmente, que P é uma proposição verdadeira.

Sendo assim, concluímos que a conjunção

$$P \wedge \sim Q \text{ é falsa.}$$

Daí, então, temos que

$$\sim(P \wedge \sim Q) \text{ é verdadeira.}$$

Como

$$\begin{aligned} \sim(P \wedge \sim Q) &\Leftrightarrow \sim P \vee Q && \text{(leis de Morgan)} \\ &\Leftrightarrow P \rightarrow Q && \text{("eliminação" do condicional),} \end{aligned}$$

podemos concluir que o condicional " $P \rightarrow Q$ " também é uma proposição verdadeira.

Logo, podemos deduzir, como desejávamos, que

$$P \Rightarrow Q$$

Vamos a dois exemplos de demonstração utilizando o método de redução ao absurdo.



EXEMPLO

Exemplo 6.10

Dadas as premissas " $\sim p \vee q$ ", " $\sim r \rightarrow \sim q$ " e " p ", vamos provar " r " utilizando método de redução ao absurdo.

Vamos assumir, então, que " r " é falsa. Dessa forma, dispomos a seguir as premissas dadas incluindo a negação " $\sim r$ " da conclusão como uma nova premissa. Vamos, portanto, aplicar as regras necessárias até chegarmos a uma contradição.

1. $\sim p \vee q$ (premissa)
2. $\sim r \rightarrow \sim q$ (premissa)
3. p (premissa)
4. $\sim r$ (premissa provisória: negação da conclusão)
5. q (silogismo disjuntivo em 1 e 3)
6. $\sim q$ (modus ponens em 2 e 4)
7. $q \dot{\cup} \sim q$ (união em 5 e 6)
8. r (demonstração indireta de 4 a 7)

Na linha 7, temos uma **contradição**. Portanto, concluímos por redução AO absurdo que " r " é verdadeira.

Exemplo 6.11

Vamos provar que se x_2 é par, então x também é par.

Neste exemplo, o procedimento utilizado será diferente daquele utilizado no exemplo anterior, mas a justificativa lógica é a mesma: a redução ao absurdo.

Vamos considerar as proposições:

p : " x_2 é par" e q : " x é par".

O que queremos provar é que o condicional " $p \rightarrow q$ " é verdadeiro ou que " $p \Rightarrow q$ ". Então, pelo método da redução ao absurdo, vamos supor que q é uma proposição falsa. Portanto, partiremos das premissas " p " e " $\sim q$ ". A premissa " $\sim q$ " pode ser escrita como " x não é par" ou, equivalentemente, " x é ímpar". Sendo assim, dizemos que existe um inteiro k tal que o número x pode ser escrito na forma:

$$x = 2k + 1$$

Portanto, temos:

$$\begin{aligned}x^2 &= (2k + 1)^2 \\&= 4k^2 + 4k + 1 \\&= 2(2k^2 + 2k) + 1.\end{aligned}$$

Tomando $c = 2k^2 + 2k$, podemos concluir que c é um número par, pois $2k^2$ e $2k$ são pares, portanto a soma deles também é um número par. Dessa forma, temos:

$$x^2 = 2c + 1$$

o que nos leva a concluir que **x^2 é ímpar**. Isso contradiz a proposição p : “ **x^2 é par**”. Logo, por redução ao absurdo, concluímos que a proposição q : “ **x é par**” é verdadeira.

6.3.3 Demonstração da forma condicional

Outra forma indireta de demonstração refere-se a um método aplicável em argumentos cuja conclusão tem a forma condicional “ $p \rightarrow q$ ”. Nesse caso, de forma semelhante ao método de redução ao absurdo, supomos “ $\sim(p \rightarrow q)$ ” verdadeira (negação da conclusão). Em seguida, partindo das premissas dadas (hipótese) e da premissa provisória, que é a negação da conclusão (tese), devemos aplicar as regras necessárias até se chegar a uma **contradição**.

Dessa forma, concluímos pela veracidade da conclusão (fato cuja justificativa já foi mostrada no método de redução ao absurdo, apresentado na seção anterior).

Vamos a um exemplo.



EXEMPLO

Exemplo 6.12

A partir das premissas “ $r \rightarrow q$ ” e “ $\sim(p \wedge q)$ ”, vamos provar que é verdadeira a conclusão “ $p \rightarrow \sim r$ ”.

A seguir, temos o desenvolvimento do raciocínio com a indicação das regras utilizadas.

1. $r \rightarrow q$ (premissa)
2. $\sim(p \wedge q)$ (premissa)

3.	$\sim(p \rightarrow \sim r)$	(premissa provisória)
4.	$\sim(\sim p \vee \sim r)$	(eliminação de condicional em 3)
5.	$\sim(\sim p) \vee \sim(\sim r)$	(lei de Morgan em 4)
6.	$\sim(\sim p)$	(simplificação em 5)
7.	p	(dupla negação em 6)
8.	$\sim(\sim r)$	(simplificação em 5)
9.	r	(dupla negação em 8)
10.	$\sim p \vee \sim q$	(lei de Morgan em 2)
11.	$\sim q$	(silogismo disjuntivo em 7 e 10)
12.	q	(modus ponens em 1 e 9)
13.	$q \wedge \sim q$	(união de 11 e 12)
14.	$p \rightarrow \sim r$	(demonstração indireta: 3 a 13)

Na linha 13, chegamos a uma contradição, o que nos leva a concluir que a proposição “ $p \rightarrow \sim r$ ” é verdadeira. Isso é equivalente a dizer que o argumento

$$r \rightarrow q, \sim(p \wedge q), p \rightarrow \sim r$$

é válido.

Outra forma de representar um argumento válido desse tipo é:

$$r \rightarrow q, \sim(p \wedge q) \vdash p \rightarrow \sim r.$$

6.3.4 Demonstração por indução

Imagine uma longa fila de dominós dispostos em sequência e considere as duas declarações seguintes como fatos verdadeiros:

- I. O primeiro dominó da fila cairá; que o primeiro dominó cairá;
- II. Se um dominó cair, o próximo também cairá.

Note que essas duas afirmações são suficientes para demonstrar que é verdadeira a conclusão “todos os dominós da fila cairão”, independentemente da quantidade n de dominós.

Há um método de demonstração, denominado **método de demonstração por indução**, que baseia-se em duas etapas que assemelham-se às declarações em (I) e (II). A primeira é denominada **base** e a segunda **passo indutivo**.

Base: etapa em que se mostra que o enunciado (conclusão) vale para $n = 1$.

Passo de indução: etapa em que se prova que se o enunciado vale para $n = k$, então vale também para $n = 1$.

Veja o desenvolvimento e aplicação desse método nos exemplos a seguir.



EXEMPLO

Exemplo 6.13

Vamos demonstrar a validade da fórmula

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

que fornece a soma dos n primeiros números naturais.

A primeira etapa (base) é mostrar que a fórmula vale para $n = 1$. Veja:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1.$$

Agora, considerando que ela é válida para $n = k$, devemos provar que ela também é válida para $n = k + 1$. Vamos, então, fazer a verificação de forma algébrica.

Se a fórmula é válida para $n = k$, temos:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Agora, vamos provar que ela também vale para $n = k + 1$. Para isso, comecemos somando " $k + 1$ " a cada um dos lados da igualdade anterior:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \quad (*)$$

Se a fórmula vale para $n = k$, então, temos que provar que se $n = k + 1$, a fórmula será dada por:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad (**)$$

Comparando as igualdades apresentadas em (*) e (**), podemos perceber que o que precisamos provar é que:

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Veja, a seguir, como podemos partir da expressão à esquerda e chegar ao formato da expressão à direita.

$$\begin{aligned} \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2} \\ &= \frac{k^2 + 3k + 2}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

Exemplo 6.14

Vamos demonstrar, por indução, a validade da fórmula

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Primeiro, verificamos sua validade para $n = 1$:

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} \Rightarrow 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} \Rightarrow 1 = 1$$

Agora, considerando-a válida para n , vamos testar sua validade para $n + 1$. Se somarmos $(n + 1)^2$ aos dois lados da igualdade (fórmula), teremos:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} \\ &= \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6} \end{aligned}$$

determinando, dessa forma, a validade da fórmula para $n + 1$.



ATIVIDADES

01. Apresente, na linguagem natural, a negação das proposições abaixo:

- a) *"Todo aluno tem bom desempenho".*
- b) *"Alguns empresários estão no evento".*
- c) *"Há jogadores bons".*

02. Negue as sentenças abaixo:

- a) "Para todo x , existe y tal que $x - y = 0$ ";
- β) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 = 0$;
- χ) $\forall x \in \mathbb{R}, x + 2 > 0$.

03. Dadas as sentenças abertas:

$$P(x): x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ e } Q(x): x + 4 \leq 0$$

com $U = \mathbb{R}$, determine os valores lógicos de:

- a) $\forall x, P(x)$;
- b) $\exists x, P(x)$;
- c) $\forall x, Q(x)$;
- d) $\exists x, Q(x)$;
- e) $\sim(\exists x, P(x))$.

04. Determine o conjunto verdade em cada um dos casos:

- a) $\sqrt{x} = x, U = \mathbb{N}$;
- b) $\sqrt{x} = x + 1, U = \mathbb{R}$;
- c) $x^2 - 5x = -4, U = \mathbb{R}$;
- d) $x^2 - 6x - 7 = 0, U = \mathbb{R}$;
- e) $x^2 - 6x - 7 = 0, U = \mathbb{Z}$;
- f) $3x + 1 > 10, U = \mathbb{R}$;
- g) $5x - 4 < 0, U = \mathbb{Z}$.

05. Utilizando os métodos de demonstração adequados, prove os seguintes argumentos:

- a) $(A \rightarrow B) \vee C, (D \vee E) \rightarrow \sim C, D \vee (E \wedge F), A \rightarrow B$
- b) $p \vee q \rightarrow s, \sim p, t \vee \sim q, \sim s \vee \sim t, \sim (p \vee q)$
- c) $c \wedge d, a \wedge b \rightarrow \sim d \vee \sim c, a \rightarrow \sim b$
- d) $p \rightarrow q \vee r, q \rightarrow \sim p, s \rightarrow \sim r, \sim (p \wedge s)$
- e) $p \wedge q \rightarrow r, r \vee q \rightarrow \sim p \vee s, s \rightarrow q, r \leftrightarrow s$

OBS: no item (e) desta questão, considere que provar o argumento cuja conclusão é o bicondicional " $r \leftrightarrow s$ " equivale a demonstrá-lo válido considerando como conclusão o condicional " $r \rightarrow s$ " e, depois, fazer o mesmo considerando como conclusão o condicional " $r \leftarrow s$ ".

06. Utilizando o método de demonstração por redução ao absurdo prove a seguinte afirmação:

“ $\sqrt{2}$ é um número irracional”.

07. (SEGEPI-MA) Sabe-se que um executivo é honesto se, e somente se, pratica exercícios físicos. João é um executivo e é sedentário. Pode-se, então, concluir que:

- a) todo executivo é desonesto.
- b) todo executivo pratica exercícios físicos.
- c) João não é um executivo honesto.
- d) todo executivo é honesto.
- e) nenhum executivo pratica exercícios físicos.

08. (EMSERH) Uma escola de dança oferece aulas de zumba, samba, sapateado, forró e frevo. Todas as professoras de zumba são, também, professoras de samba, mas nenhuma professora de samba é professora de sapateado. Todas as professoras de forró são, também, professoras de frevo, e algumas professoras de frevo são, também, professoras de sapateado. Sabe-se que nenhuma professora de frevo é professora de samba, e como as aulas de samba, forró e sapateado não têm nenhuma professora em comum, então:

- a) nenhuma professora de forró é professora de zumba.
- b) pelo menos uma professora de forró é professora de sapateado.
- c) pelo menos uma professora de zumba é professora de sapateado.
- d) todas as professoras de frevo são professoras de zumba.
- e) todas as professoras de frevo são professoras de forró.

09. Preocupados em reestruturar as atividades oferecidas pelo Centro Esportivo da cidade, os dirigentes fizeram uma pesquisa sobre a preferência dos usuários aos esportes oferecidos. Notou-se que todos os praticantes de caminhada também faziam yoga, mas nenhum dos alunos de yoga praticava natação. Todos os alunos de spinning eram também praticantes de pilates e alguns dos que praticavam pilates faziam natação. Como nenhum dos alunos de pilates praticava yoga e nenhum dos que faziam spinning praticavam natação, conclui-se que:

- a) pelo menos um praticante de spinning faz yoga.
- b) pelo menos um praticante de caminhada faz natação.
- c) nenhum praticante de spinning faz caminhada.
- d) todos os praticantes de pilates também praticam spinning.
- e) todos os frequentadores de yoga também fazem pilates.

10. Demonstre a validade das seguintes fórmulas, utilizando o método de indução:

a) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$



REFLEXÃO

As aplicações da lógica matemática são incontáveis. Raciocinar de forma lógica é importante em toda e qualquer situação e tudo que estudamos neste livro, certamente, poderá contribuir para que você consiga resolver problemas com maior eficiência. Não deixe de se exercitar na aplicação dos conceitos aqui abordados.

Como se isso não bastasse, as aplicações da lógica forma e dedutiva que estudamos ao longo de nosso curso são de fundamental importância ao desenvolvimento das linguagens computacionais. Há uma estreita ligação entre vários dos pontos que estudamos, como conectivos, leis de equivalência, regras de inferência, quantificadores etc, com os procedimentos necessários ao desenvolvimento de um programa computacional.

Por isso, empenhe-se no estudo dessa ciência e não pare por aqui. O objetivo desse texto é lhe apresentar os principais tópicos da lógica matemática, mas há muito mais para se estudar. Consulte as referências citadas após as atividades para conhecer mais sobre lógica.

Bons estudos!



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALENCAR FILHO, E. de. **Iniciação à lógica matemática**. 22ª ed São Paulo: Nobel, 2003.

DAGHLIAN, J. **Lógica e álgebra de Boole**. 4ª ed. São Paulo: Atlas, 1995.

NOLT, J. & RHATYN, D. **Lógica**, Makron Books do Brasil, 1991

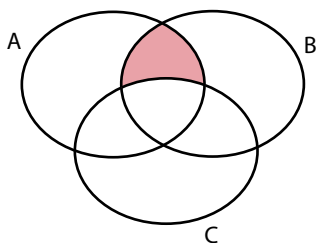
SÉRATES, J. **Raciocínio lógico**: lógico matemático, lógico quantitativo, lógico numérico, lógico analítico, lógico crítico. 8ª ed. Brasília: Jonofon Ltda, 1998.



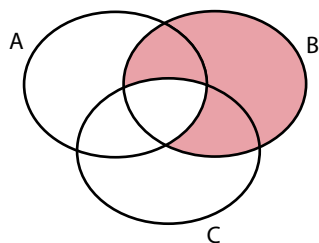
GABARITO

Capítulo 1

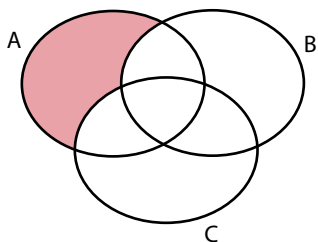
01.



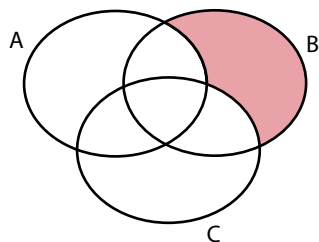
a)



c)



b)



d)

02. (construção de diagramas para provar as relações)

03.

a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

e) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

b) \emptyset

f) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

c) \emptyset

g) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

d) $\{2, 4, 10\}$

04.

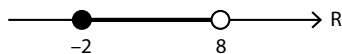
a) $\{x \in \mathbb{R} / 6 \leq x \leq 9\}$

c) $\{9\}$

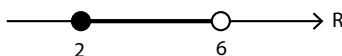
b) $\{x \in \mathbb{R} / 7 < x < 9\}$

05.

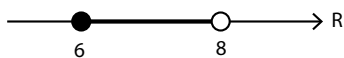
a) $[-2, 8[$



b) $[2, 6[$



c) $[6, 8[$



06.

a) $]3, \infty[$

f) $[5, \infty[$

b) $] -\infty, \infty[$

g) $] -\infty, 4[$

c) $[5, 7]$

h) $\mathbb{R} -]3, 7] =] -\infty, 3] \cup] \infty, \infty[$

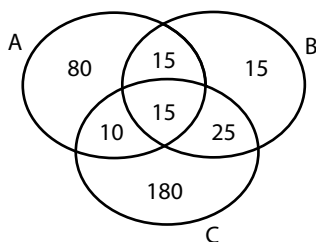
d) $]3, 4[$

i) $\mathbb{R} - [5, \infty[=] -\infty, 5[$

e) $]3, 5[$

j) $\mathbb{R} -] -\infty, 4[= [4, \infty[$

07. Sugestão: a partir das informações dadas, distribua as quantidades nos diagramas abaixo.



a) 15

b) $80 + 15 + 180 = 275$

c) $15 + 10 + 25 = 50$

d) $80 + 15 + 15 + 10 + 15 + 25 = 160$

e) $80 + 15 = 95$

08. 69%

09. E

10. B

11. A

12. B

13. $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)$

14.

a) $S = \left\{ \frac{13}{10}, \frac{3}{2} \right\}$

c) $S = \left\{ \frac{7}{6} \right\}$

b) $S = \{1\}$

d) $S = \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{3}{2} \right\}$

Capítulo 2

01. 20

02. 2.700

03. Para resolver esta questão, primeiramente, considere a divisão do quadrado (de lado 6) em 36 quadrados de lado igual a 1. Dessa forma, a diagonal de cada quadrado menor terá medida igual a $\sqrt{2}$. Sendo assim, pelo princípio da casa de pombos, será necessário marcar, no mínimo 37 pontos no quadrado maior.

04. O resultado pode ser obtido através do cálculo de um arranjo de 42 elementos tomados 2 a 2. Resposta: 1.722 (alternativa: B)

05.

a) $\frac{1}{50.063.860} \cong 0,00000002 = 0,000002\%$

b) $\frac{1}{5.461.512 + 487.635} = \frac{1}{5.949.147} \cong 0,00000017 = 0,000017\%$

06. 175.760.000

07. Como uma vaga precisa, necessariamente, ser ocupada por um professor de Matemática, há 16 maneiras diferentes disso ocorrer (trata-se de uma combinação de 16 elementos tomados 1 a 1, isto é, $C_{16,1}$). As outras cinco vagas podem ser ocupadas por qualquer um dos outros 27 professores restantes (12 de Física e 15 de Matemática), ou seja, a quantidade de formas diferentes disso ocorrer é igual a uma combinação de 27 elementos tomados 5 a 5 ($C_{27,5}$). Sendo assim, temos:

$$C_{16,1} \cdot C_{27,5} = 16 \cdot 80.730 = 1.291.680$$

08. B

09. $C_{8,3} = 56$

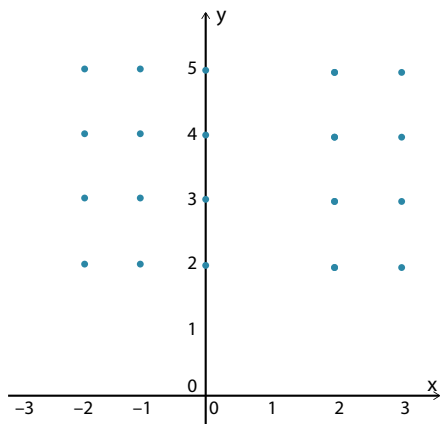
10. C (Teríamos 8 sequências que possuem pelo menos três zeros em posições consecutivas):

- Exatamente três zeros consecutivos: {00010, 00011, 10001, 01000, 11000}
- Exatamente quatro zeros consecutivos: {00001, 10000}
- Exatamente cinco zeros consecutivos: {00000}

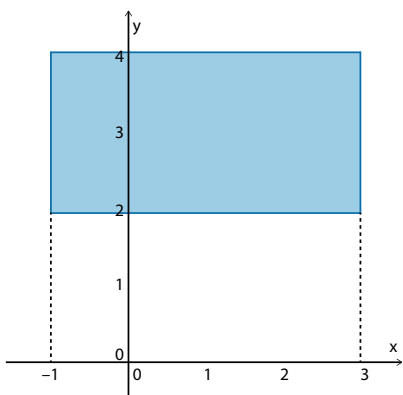
Capítulo 3

01.

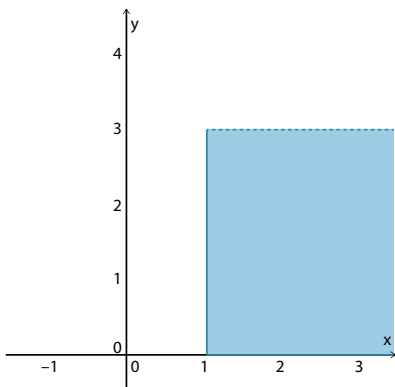
a)



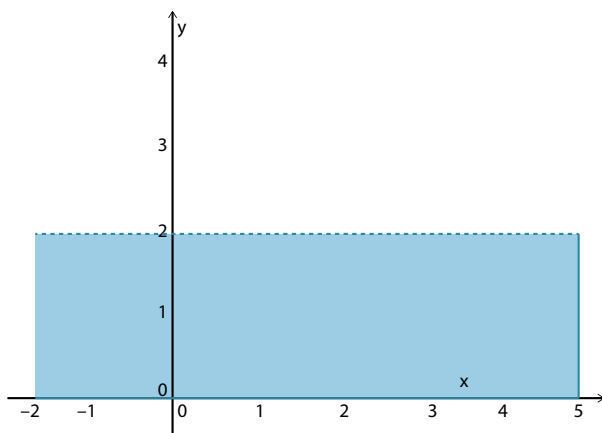
b)



c)

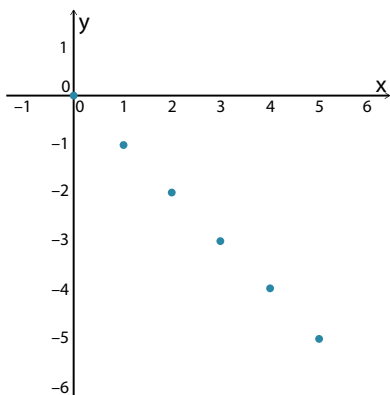


d)



02.

a)

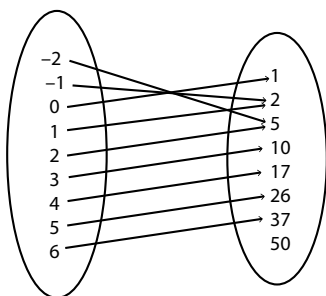


b) $D(R) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; $\text{Im}(R) = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0\}$

03.

a) $(-2, 5), (-1, 2), (0, 1), (1, 2), (2, 5), (3, 10), (4, 17), (5, 26), (6, 37)$

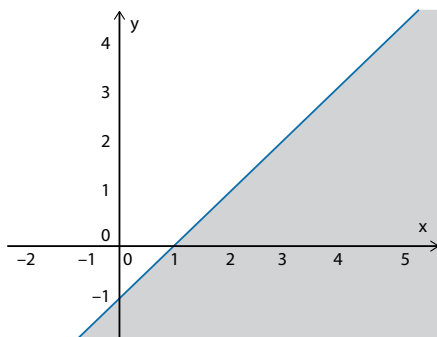
b)



c) $D(S) = A$; $CD(S) = B$; $Im(S) = B - \{50\}$

04.

a)



b) Antissimétrica e transitiva.

c) Não, pois não possui a propriedade reflexiva.

d) Não, pois não possui as propriedades reflexiva e simétrica.

05.

a) Reflexiva, simétrica e transitiva.

b) Não, pois não possui a propriedade antissimétrica.

c) Sim, pois é reflexiva, simétrica e transitiva.

06. A relação R , aqui definida, é:

$$R = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}.$$

Dessa forma, podemos notar que para qualquer $x \in A = \{0, 1, 2, 3\}$, temos que $(x, x) \in R$. Sendo assim, a relação R é reflexiva, o que nos leva a concluir que seu fecho reflexivo é ela própria.

Quanto ao fecho simétrico, temos:

$$R \cup \{(1, 0), (2, 0), (3, 0), (1, 2), (1, 3)\}.$$

Para obter o fecho transitivo, é preciso determinar os elementos que faltam na relação R que a tornariam uma relação transitiva. No entanto, ela já é uma relação transitiva. Portanto, seu fecho transitivo é a própria relação R .

07.

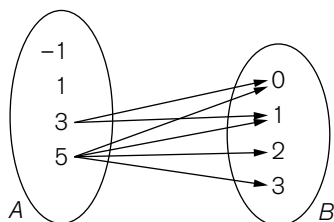
a) $R = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 6)\}$

b) Reflexiva, simétrica e transitiva.

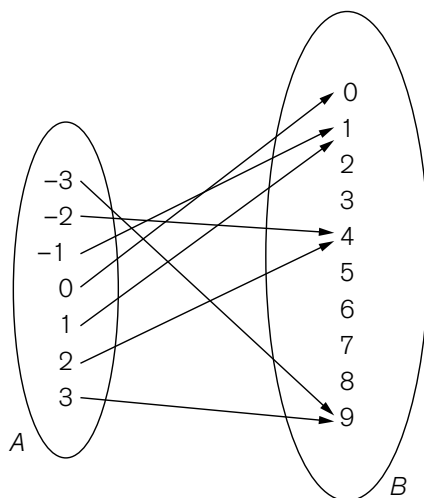
Capítulo 4

01.

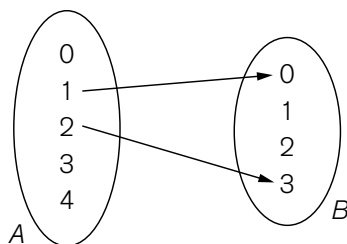
a) Não é função.



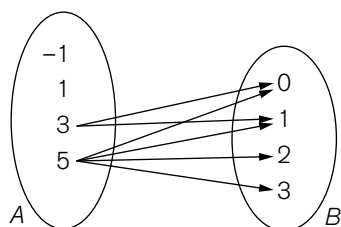
b) É função. Não é injetora e nem sobrejetora. Portanto, também não é bijetora.



c) É função sobrejetora, mas não é injetora e nem bijetora.

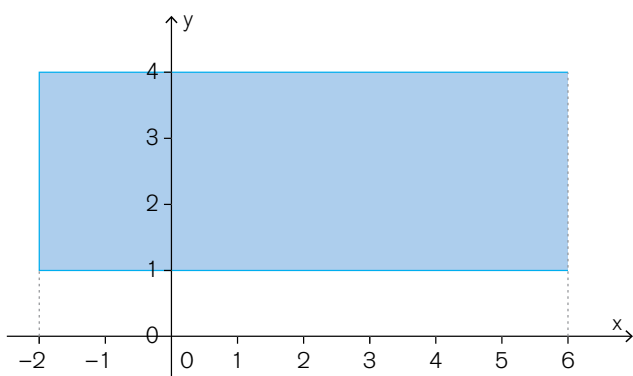


d) Não é função.

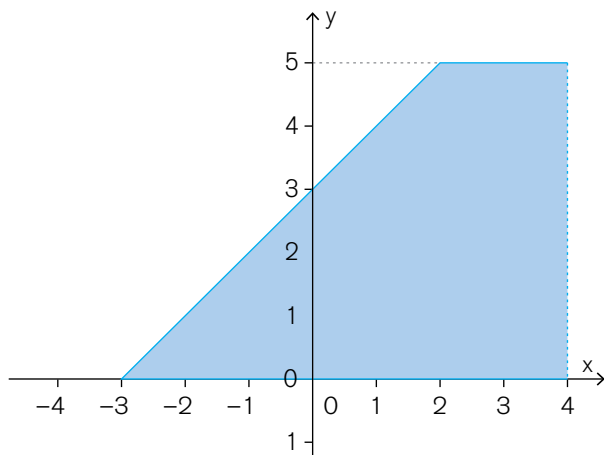


02.

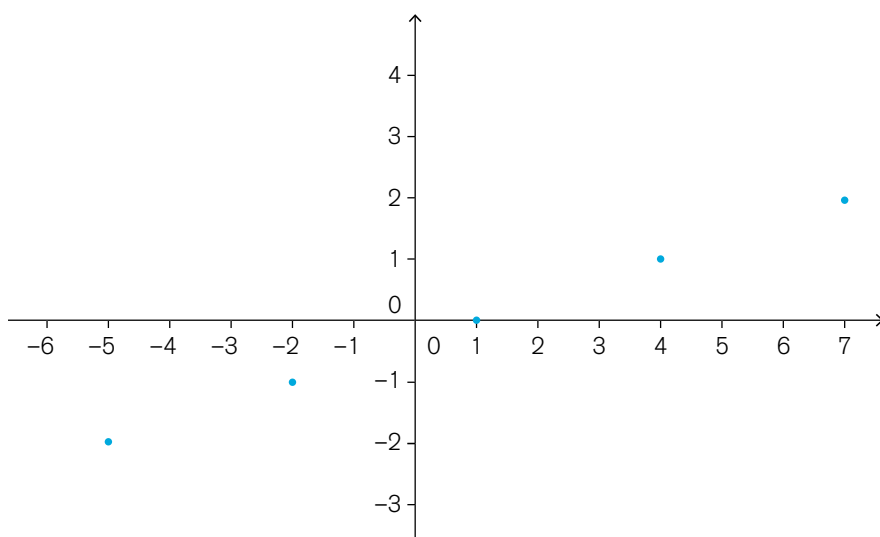
a)



b)

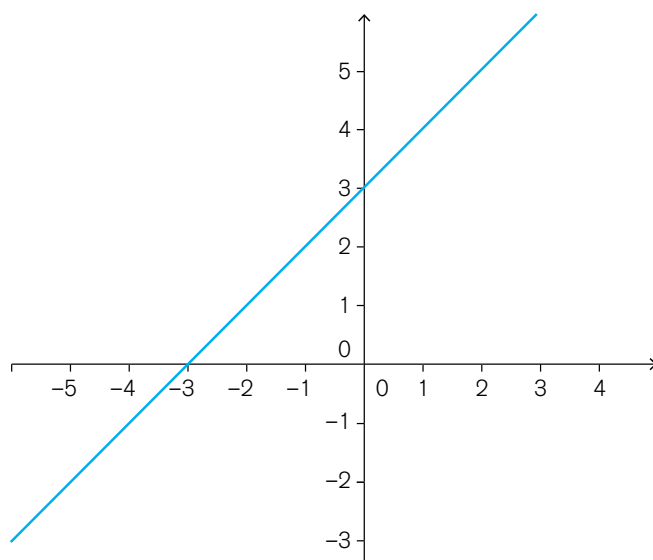


c)

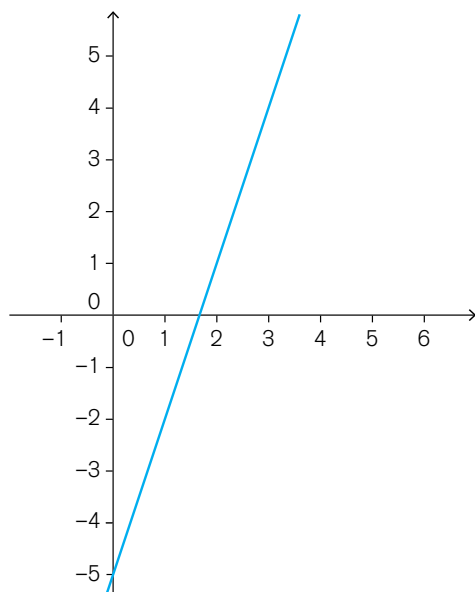


03.

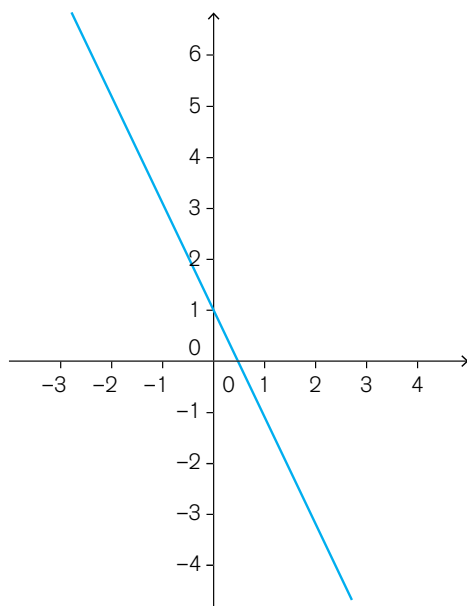
a) Sobrejetora, injetora e bijetora.



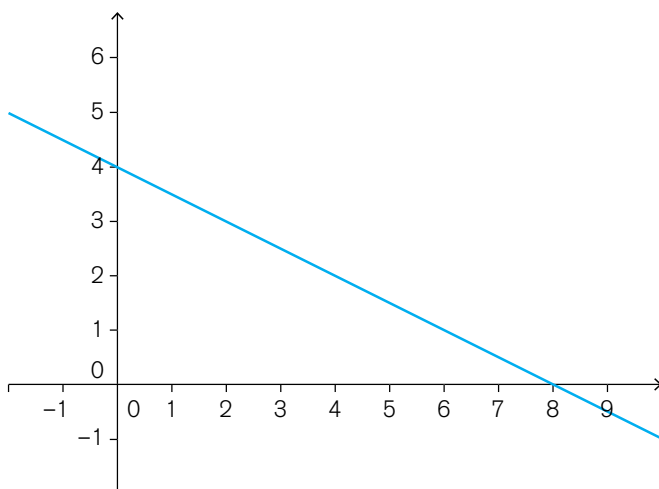
b) Sobrejetora, injetora e bijetora.



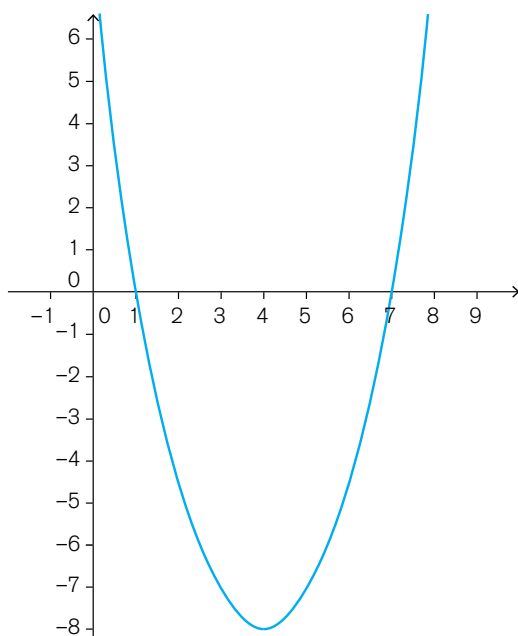
c) Sobrejetora, injetora e bijetora.



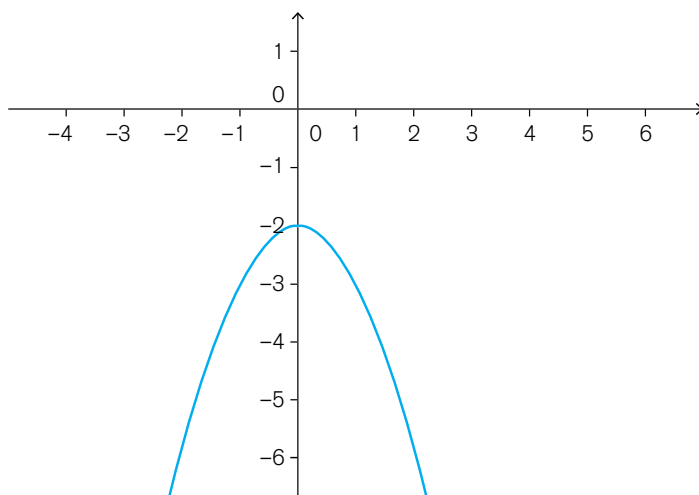
d) Sobrejetora, injetora e bijetora.



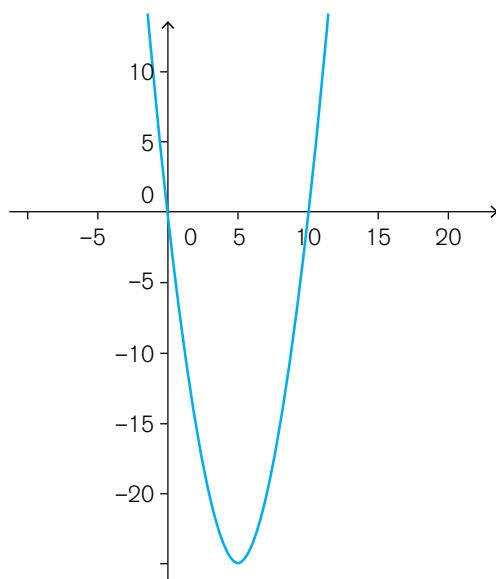
e) Não é injetora, nem sobrejetora e nem bijetora.



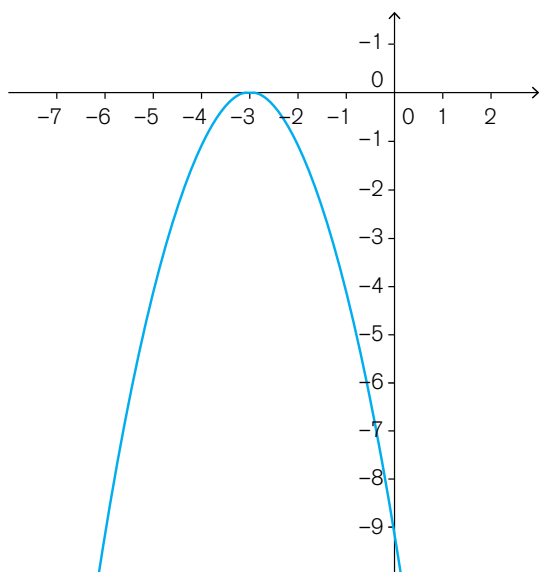
f) Não é injetora, nem sobrejetora e nem bijetora.



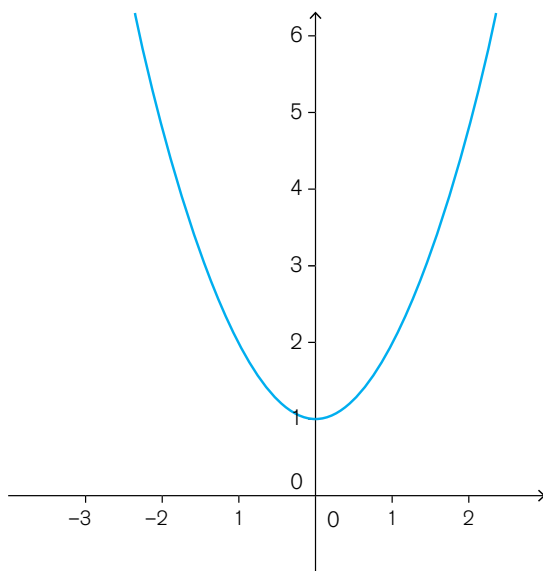
g) Não é injetora, nem sobrejetora e nem bijetora.



h) Não é injetora, nem sobrejetora e nem bijetora.



i) Não é injetora, nem sobrejetora e nem bijetora.



04.

- a) Expressão: $y = 6 + 1,5x$, em que y é o valor cobrado, em reais, e x é a distância percorrida, em km.

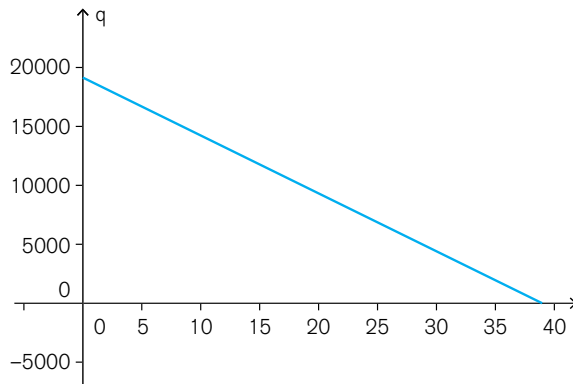
Por uma corrida de 15 km, receberá R\$ 28,50.

05. $y = 3x - 1$

06.

- a) $q = -500p + 19.500$

b)



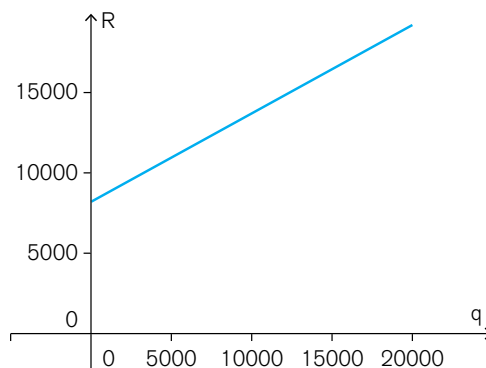
- c) 15

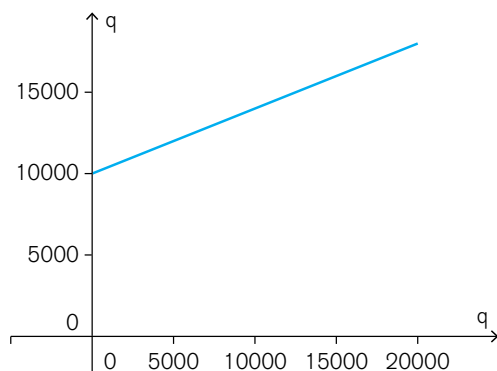
07.

- a) Considerando R a receita total e q a quantidade de revistas vendidas, temos, respectivamente, as expressões:

$$R = 80.000 + 6q \text{ e } R = 100.000 + 4,5q.$$

b)





- c) Para determinar essa quantidade, igualamos as expressões apresentadas no item (a) e resolvemos a equação resultante, como a seguir:

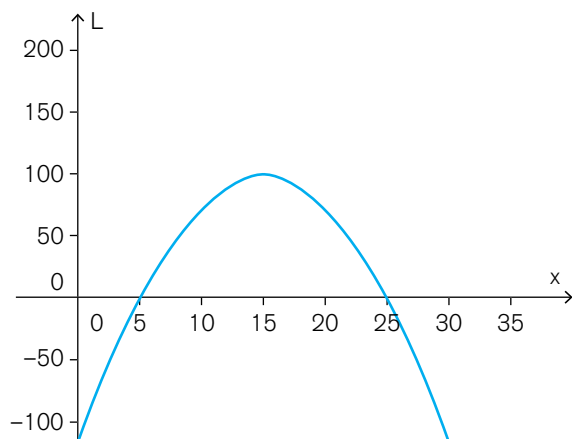
$$80.000 + 6q = 100.000 + 4,5q$$

$$1,5q = 20.000$$

$$q \cong 13.333$$

08.

a)



b) 15

c) 100

d) Para $0 \leq x < 5$ e $x > 25$

09. D

Capítulo 5

01.

- a) não dedutivo
- b) não dedutivo
- c) não dedutivo
- d) não dedutivo

02.

- a) $p \vee q$
- b) $\sim(\sim p \vee \sim q)$
- c) $\sim p \wedge \sim q$
- d) $p \rightarrow q$
- e) $p \leftrightarrow q$
- f) $\sim(\sim p \wedge \sim q)$

03.

- a) Aurélio joga basquete e Flávia joga vôlei.
- b) urélio joga basquete ou Marcelo pratica natação.
- c) Se Marcelo pratica natação, então Flávia joga vôlei.
- d) Se Marcelo pratica natação, então Flávia joga vôlei ou Aurélio joga basquete.
- e) Aurélio joga basquete e Flávia não joga vôlei.
- f) Não é verdade que Aurélio joga basquete e que Flávia joga vôlei.
- g) Não é verdade que Flávia não joga vôlei.
- h) Flávia joga vôlei se, e somente se, Marcelo pratica natação.

04.

- a) $(p \wedge q) \wedge r$

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	F
F	V	V	F	F
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

b) $p \wedge q \wedge r$

p	q	r	$p \wedge q \wedge r$
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	F

c) $r \rightarrow q$

r	q	$r \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

d) $\sim r \vee q$

r	q	$\sim r$	$\sim r \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

e) $\sim r \underline{\vee} q$

r	q	$\sim r$	$\sim r \underline{\vee} q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

f) $(p \vee \sim q) \rightarrow q$

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$(p \vee \sim q) \rightarrow q$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

g) $(p \vee \sim q) \rightarrow q \leftrightarrow r$

p	q	r	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$(p \wedge \sim q) \rightarrow q$	$(p \vee \sim q) \rightarrow q \leftrightarrow r$
V	V	V	F	F	V	V
V	V	F	F	F	V	F
V	F	V	V	V	F	F
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	F	V	F
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V	F

h) $(\sim q \vee p) \leftrightarrow (q \vee \sim r)$

p	q	r	$\sim q$	$\sim r$	$\sim q \vee p$	$q \wedge \sim r$	$(\sim q \vee p) \leftrightarrow (q \vee \sim r)$
V	V	V	F	F	V	F	F
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	V	F	F
F	V	V	F	F	F	F	V
F	V	F	F	V	F	V	F
F	F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	F	F

i) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \vee \sim (p \leftrightarrow q)$

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$	$\sim (p \leftrightarrow q)$	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \vee \sim (p \leftrightarrow q)$
V	V	V	V	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V	V
F	V	V	F	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	F	V

j) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee r) \wedge (p \vee t)$

p	q	r	t	$p \wedge q$	$p \vee r$	$p \vee t$	$(p \wedge r) \vee (p \vee t)$	$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee r) \wedge (p \vee t)$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	F	F	V	F	V
F	V	F	F	F	F	F	F	V

F	F	V	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	F	V	F	F	V
F	F	F	V	F	F	V	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

05.

- a) V
- b) F
- c) V
- d) V

06.

- a) $V(p) = 1; V(q) = 1; V(r) = 0$
- b) $V(p) = 1; V(q) = 1; V(r) = 0$
- c) $V(p) = 0; V(q) = 0; V(r) = 0$
- d) $V(p) = 0; V(q) = 1; V(r) = 1$

07.

- a) argumento válido
- b) argumento válido

08.

- a) silogismo disjuntivo
- b) silogismo hipotético

09. D

10. Demonstrações utilizando as regras de equivalência

Capítulo 6

01.

- a) "Nem todo aluno tem bom desempenho" (ou "Existe pelo menos um aluno que não tem bom desempenho")
- b) "Nenhum empresário está no evento"
- c) "Nenhum jogador é bom"

02.

- $\alpha) \exists x, (\forall y, x - y \neq 0)$
- $\beta) \forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 \neq 0$
- $\chi) \exists x \in \mathbb{R}, x + 2 \leq 0$

03.

- a) F
- b) V
- c) F
- d) V
- e) F

04.

- a) $V = \{0, 1\}$
- b) $V = \{ \}$
- c) $V = \{1, 4\}$
- d) $V = \{-1, 7\}$
- e) $V = \{-1, 7\}$
- f) $V = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 3\}$
- g) $V = \{x \in \mathbb{Z} / x < 4 / 5\} = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$

05. (demonstração)

06. (demonstração)

07. C

08. A

09. C

10. (demonstração)



ANOTAÇÕES



ANOTAÇÕES