

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP**

Adriana Tiago Castro dos Santos

**O Ensino da Função Logarítmica por meio de uma sequência
didática ao explorar suas representações com o uso do
*software GeoGebra***

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo

2011

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

Adriana Tiago Castro dos Santos

**O Ensino da Função Logarítmica por meio de uma sequência
didática ao explorar suas representações com o uso do
software GeoGebra**

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo,
como exigência parcial para a obtenção do título de
MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, sob a
orientação da **Professora Doutora Barbara Lutaif
Bianchini**.*

São Paulo

2011

Banca Examinadora

Autorizo exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ Local e Data: _____

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho ao meu esposo Alberto e às minhas filhas Letícia e Larissa, com amor, admiração e gratidão por sua compreensão, carinho, presença e incansável apoio ao longo do período de elaboração deste trabalho.

Aos meus pais, pois sem eles nada aconteceria na minha vida.

À minha sogra Maria José Maia (in memoriam) por ter me incentivado a sempre continuar a minha carreira acadêmica.

AGRADECIMENTOS

A Deus toda honra, glória e louvor para sempre, pois me deu a oportunidade de realizar este trabalho.

À professora Doutora Barbara Lutaif Bianchini pela paciência, dedicação, compreensão durante a orientação deste trabalho e por ter proporcionado momentos de discussões que contribuíram para o meu crescimento profissional.

Aos professores Doutor Antonio Carlos Brolezzi e Doutor Jairo de Araújo Lopes participantes da banca examinadora, por suas ricas sugestões durante o exame de qualificação que contribuíram para a finalização deste trabalho.

Aos professores que ministraram as disciplinas do mestrado acadêmico e proporcionaram momentos de discussões, reflexões e aprendizagem.

À professora Doutora Silvia Dias Alcântara Machado por seus ensinamentos durante as aulas de Didática II e nos encontros do GPEA.

Ao meu esposo Alberto às minhas filhas Letícia e Larissa pelo incentivo e compreensão durante todo o curso e por acreditarem na minha conquista.

À minha cunhada Cacilda e à minha sobrinha Nádia, que me auxiliaram em todos os momentos das quais eu precisei.

À minha cunhada Rode, por todas as revisões de língua portuguesa nos meus artigos e pelo incentivo.

Aos meus amigos do curso: Maria Lúcia, Miguel Athias, Sara Lacerda, Fernanda Ravazi, Edson, Cláudia Theodoro, Cláudia Vicente, Fernando, Silvio e Carlos, pois partilhamos momentos de alegrias e dificuldades.

Aos meus amigos especiais Rogério Cordeiro e Wadames Procópio, pelos momentos de discussões e sugestões para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus alunos João Paulo e Filipe Mercês por terem participado em alguns momentos na elaboração deste trabalho.

À equipe gestora da escola em que trabalho: Angela Filassi, Luciana Martins, Magda Aparecida e Edson. Por todo apoio que precisei durante a elaboração e aplicação desta pesquisa e o incentivo para participar nos congressos durante o curso.

Aos meus alunos que participaram desta pesquisa, pela colaboração e aprendizagem que compartilhamos durante as sessões de trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES- pela concessão de bolsa de estudos durante o curso.

“Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse mas a aquisição, não é a presença mas o ato de atingir a meta”.

Carl Friedrich Gauss

RESUMO

Este estudo tem como objetivo elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática que envolveu o tema função logarítmica utilizando o *software* GeoGebra como uma estratégia pedagógica. Para tanto escolhemos como aporte teórico a Teoria dos Registros de Representação e Semiótica descrita por Duval (2009) e os processos do Pensamento Matemático Avançado segundo Dreyfus (1991). Como referencial metodológico, utilizamos os pressupostos da Engenharia Didática (ARTIGUE, DOUADY, MORENO, 1995). As escolhas das atividades para compor a sequência foram retiradas do Caderno do Professor de Matemática da 1ª Série do Ensino Médio volume 3 (SÃO PAULO, 2009) com algumas adaptações que julgamos necessárias. Os sujeitos da pesquisa foram estudantes do 3º ano do Ensino Médio de uma escola da rede estadual de São Paulo no Município de Itaquaquecetuba, durante oito encontros presenciais. As análises das produções realizadas pelos alunos em conjunto com as transcrições dos diálogos gravados em áudio durante a aplicação da sequência didática apontaram que houve dificuldade em fazer a conversão do registro gráfico no registro de partida para os registros: algébrico e na língua natural no registro de chegada. Segundo relato dos participantes, o uso do *software* GeoGebra contribuiu para a visualização e para a compreensão do comportamento gráfico das funções estudadas. Os processos do Pensamento Matemático Avançado envolvido nas estratégias de resoluções dos estudantes foram: a descoberta por meio de investigação, mudança de representação de um mesmo conceito, generalização e abstração. Segundo Dreyfus (1991) esses processos são relevantes para a compreensão de um conceito matemático. Após as análises dos resultados concluímos que a aplicação da sequência didática utilizando o *software* GeoGebra foi uma estratégia eficiente para atingir os nossos objetivos propostos inicialmente.

Palavras-chave: Função Logarítmica, Processos do Pensamento Matemático Avançado, Registros de Representação e Semiótica, *Software* GeoGebra, Ensino Médio.

ABSTRACT

This study aims at developing, to apply and to analyze a didactic sequence which has involved the logarithm function theme using the software GeoGebra as a pedagogical strategy. For this purpose we have chosen the Registers of Semiotic Representation Theory as theoretical framework, as described by Duval (2009) as well as the Advanced Mathematical Thinking Processes, according to Dreyfus (1991). We have used the project of Didactic Engineering (ARTIGUE, DOUADY, MORENO, 1995) as methodological reference. The activities chosen to compose the sequence were retrieved from Math Teacher's book of the High School to the first grade third quarter of 2009 (SÃO PAULO, 2009) with some adaptations which we judged necessary. The fellows of this survey were students of a public school in São Paulo State in the town of Itaquaquecetuba who were observed during eight presence meetings. The analyses of the production achieved by the students in connection with the transcriptions of the dialogues recorded in audio during the proposal of the didactic sequence pointed out that there were difficulties in making the conversion from the graphic register in the initial record to the registers: algebraic and in the natural language in the final record. Based on the report of the participants, the use of the software GeoGebra has contributed to the visualization and to the understanding of the graphic performance of the studied functions. The Advanced Mathematical Thinking Processes involved in the strategies of the solutions of the students were: the discovery by using investigation, changing of representation for the same concept, generalization and abstraction. According to Dreyfus (1991) these processes are relevant to the understanding of a mathematical concept. After the analyses of the results we have concluded that the application of the didactical sequences using the software GeoGebra was efficient strategy to achieve our initially proposed objectives.

Keywords: logarithm function, Advanced Mathematical Thinking Processes, Registers of Semiotic Representation Theory, Geogebra, Secondary Teaching.

LISTA DE SIGLAS

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.
GPEA	Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica.
OCEM	Orientações Curriculares do Ensino Médio.
PCNEF	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental.
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio.
PCN+	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio.
PUC/ SP	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
SAEB	Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica.
THA	Trajetória Hipotética de Aprendizagem.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Coordenação entre os Registros de Representação Semiótica.....	31
Figura 2 - Tipos e funções de representações.....	34
Figura 3 - Sistemas de Mudanças de Representações.	38
Figura 4 - Representações em sistema algébrico e gráfico.....	39
Figura 5 - Atividade Cognitiva de Tratamento.....	39
Figura 6 - Atividade Cognitiva de Conversão.....	40
Figura 7 - Atividade de conversão em que pode ocorrer fenômeno congruente.....	43
Figura 8 - Atividade de conversão que pode ocorrer fenômeno não congruente.....	44
Figura 9 - Esquema das fases da Engenharia Didática empregadas nesta pesquisa.	52
Figura 10 - Exemplo de Questão da Prova do SAEB.	58
Figura 11 - Janela do <i>software</i> GeoGebra.	77
Figura 12 - Potências de base 2.....	80
Figura 13 - A hipérbole retangular.....	84
Figura 14 - A área sob a hipérbole retangular de $x = 1$ e $x = t$	85
Figura 15 - O Método de Fermat.....	86
Figura 16 - Melhor aproximação da área por meio de retângulos menores.	87
Figura 17 - O método de Fermat aplicado à hipérbole.	88
Figura 18 - A área sob o gráfico $y = f(x)$	90
Figura 19 - As equações e^x e $y = \ln x$ representam funções inversas.....	91
Figura 20 - Quadro geral de conteúdos do 3º Bimestre do Ensino Médio.....	94
Figura 21 - Situação de Aprendizagem 1.....	96
Figura 22 - Aproximações da raiz quadrada de dois.	97
Figura 23 - Situação de Aprendizagem 1.....	97
Figura 24 - Alguns valores da tabela de logaritmos.....	99
Figura 25 - Tabela de Potências e Logaritmos.	100
Figura 26 - Relação das propriedades das potências com as propriedades dos logaritmos.	101
Figura 27 - Gráficos da função exponencial para diferentes valores de a	102
Figura 28 - Gráfico da Função Exponencial no caso em que $a > 1$	103
Figura 29 - Gráfico da função Logarítmica no caso em que $a > 1$	103
Figura 30 - Gráfico da Função Logarítmica no caso em que $a > 1$	104
Figura 31 - Gráfico da Função Exponencial e Logarítmica no caso $a > 1$	104
Figura 32 - Gráfico da Função Exponencial e Logarítmica, no caso em que $0 < a < 1$	105
Figura 33 - Função Exponencial e a sua inversa.....	105
Figura 34 - Escala Logarítmica.....	106
Figura 35 - Situação de Aprendizagem 1 - Sessão I adaptada pela autora.	111
Figura 36 - Situação de Aprendizagem 1 - Sessão I adaptada pela autora.	113

Figura 37 - Situação de Aprendizagem 1 e adaptada pela autora.....	114
Figura 38 - Gráfico da Função Exponencial no <i>software</i> GeoGebra.	115
Figura 39 - Questões sobre Funções Exponenciais – Sessão II.	115
Figura 40 - Questões sobre Funções Exponenciais – Sessão II.	116
Figura 41 - Exploração do Conceito de Logaritmos – Sessão III.....	118
Figura 42 - Situação de Aprendizagem II e adaptada pela autora.....	120
Figura 43 - Exploração do Conceito de Logaritmos.....	121
Figura 44 - Exploração das Propriedades dos Logaritmos.....	121
Figura 45 - Propriedades dos logaritmos	122
Figura 46 - Propriedade do logaritmo de uma Potência	123
Figura 47 - Relação entre a equação exponencial e logarítmica.....	123
Figura 48 - Situação-problema envolvendo Logaritmos – Sessão III.	124
Figura 49 - Representação no registro gráfico das Funções Afim.....	125
Figura 50 - Tabela de Coordenadas da função definida por f	126
Figura 51 - Tabela de Coordenadas da função definida por g	126
Figura 52 - Tabela de coordenadas de ponto da função definida por f	127
Figura 53 - Representação da função logarítmica no registro gráfico.	127
Figura 54 - Representação da função exponencial no registro gráfico.	128
Figura 55 - Tabela de coordenadas de pontos da função g	128
Figura 56 - Protocolo da dupla D1 - Sessão I.	132
Figura 57 - Protocolo da dupla D1 - Rascunho - Sessão I.....	133
Figura 58 - Protocolo da dupla D1 - Sessão I.	134
Figura 59 - Protocolo da dupla D1 - Sessão I.	136
Figura 60 - Protocolo da dupla D2 - Sessão I.	138
Figura 61 - Protocolo da dupla D2 - Sessão I.	140
Figura 62 - Protocolo da dupla D2 - Sessão I.	141
Figura 63 - Protocolo da dupla D3 - Sessão I.	142
Figura 64 - Protocolo da dupla D3 - Sessão I.	144
Figura 65 - Protocolo da dupla D3 - Sessão I.	145
Figura 66 - Síntese dos Resultados da análise <i>a posteriori</i> da Sessão I.	146
Figura 67 - Situação de Aprendizagem 1 e adaptada pela autora.....	147
Figura 68 - Rascunho feito pela dupla D3 – Sessão II.....	148
Figura 69 - Representação da função exponencial no registro gráfico.	149
Figura 70 - Recorte do protocolo das duplas D1, D2 e D3.	149
Figura 71 - Protocolo da dupla D3 - Sessão II.	150
Figura 72 - Protocolo da dupla D2 usando o <i>software</i> GeoGebra.	151
Figura 73 - Protocolo da dupla D2 - Sessão II.	151
Figura 74 - Protocolo da dupla D3 - Sessão II.	152
Figura 75 - Síntese dos Resultados da análise <i>a posteriori</i> da Sessão II.	154
Figura 76 - Protocolo da dupla D1 - Sessão III.	156

Figura 77 - Protocolo da dupla D1 - Sessão III.	156
Figura 78 - Protocolo da dupla D1 - Sessão III.	156
Figura 79 - Protocolo da dupla D1 - Sessão III.	157
Figura 80 - Protocolo da dupla D1 - Sessão III.	158
Figura 81 - Protocolo da dupla D1 - Sessão III.	158
Figura 82 - Protocolo da dupla D1 - Sessão III.	159
Figura 83 - Protocolo da dupla D1 - Sessão III.	159
Figura 84 - Protocolo da dupla D1 - Sessão III.	160
Figura 85 - Protocolo da dupla D2 - Sessão III.	163
Figura 86 - Protocolo da dupla D2 - Sessão III.	163
Figura 87 - Protocolo da dupla D2 - Sessão III.	164
Figura 88 - Protocolo da dupla D2 - Sessão III.	165
Figura 89 - Protocolo da dupla D3 - Sessão III.	166
Figura 90 - Protocolo da dupla D3 - Sessão III.	167
Figura 91 - Protocolo da dupla D3 - Sessão III.	167
Figura 92 - Protocolo da dupla D3 - Sessão III.	168
Figura 93 - Protocolo da dupla D3 - Sessão III.	168
Figura 94 - Protocolo da dupla D3 - Sessão III.	169
Figura 95 - Protocolo da dupla D3 - Sessão III.	169
Figura 96 - Síntese dos Resultados da análise <i>a posteriori</i> da Sessão III.	171
Figura 97 - Protocolo da dupla D1 - Sessão IV.	172
Figura 98 - Protocolo da dupla D1 - Sessão IV.	173
Figura 99 - Protocolo da dupla D1 - Sessão IV.	174
Figura 100 - Protocolo da dupla D1 - Sessão IV.	174
Figura 101 - Protocolo da dupla D2 - Sessão IV.	175
Figura 102 - Protocolo da dupla D2 - Sessão IV.	176
Figura 103 - Protocolo da dupla D2 - Sessão IV.	176
Figura 104 - Protocolo da dupla D1 - Sessão IV.	177
Figura 105 - Protocolo da dupla D2 - Sessão IV.	177
Figura 106 - Protocolo da dupla D2 - Sessão IV.	178
Figura 107 - Protocolo da dupla D2 - Sessão IV.	179
Figura 108 - Protocolo da dupla D3 - Sessão IV.	180
Figura 109 - Protocolo da dupla D3 - Sessão IV.	181
Figura 110 - Protocolo da dupla D3 - Sessão IV.	181
Figura 111 - Protocolo da dupla D3 - Sessão IV.	182
Figura 112 - Protocolo da dupla D3 - Sessão IV.	183
Figura 113 - Síntese dos Resultados da análise <i>a posteriori</i> da Sessão IV.	184

SUMÁRIO

RESUMO	8
INTRODUÇÃO	16
Capítulo I	19
DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA E OBJETIVO.....	19
Justificativa e Motivações para o estudo	19
Capítulo II	25
REFERENCIAL TEÓRICO E METODOLÓGICO.....	25
2.1. Os Registros de Representação Semiótica	25
2.1.1. Classificação dos diferentes tipos de representações	33
2.1.2. Representações Semióticas, tipos de tratamentos e a aprendizagem	36
2.1.3. As atividades cognitivas de representação ligadas à <i>semiós</i>	37
2.1.4. Fenômenos característicos da conversão das representações	42
2.2. Os Processos do Pensamento Matemático Avançado	46
2.3. A Engenharia Didática como Metodologia de Pesquisa	49
2.3.1. As fases da Engenharia Didática	50
Capítulo III	53
ESTUDOS PRELIMINARES	53
3.1. Os documentos oficiais e o ensino das funções logarítmicas	53
3.2. Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB)	56
3.3. Pesquisas referentes ao ensino e aprendizagem de Funções Logarítmicas	59
3.4. O Uso das Tecnologias no Ensino de Funções Logarítmicas	73
3.5. História da invenção dos logaritmos	78
3.6. A relação da quadratura da hipérbole com a função logarítmica	83
Capítulo IV	93
PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	93
4.1. Descrição do Caderno do Professor de Matemática	94

4.2. Entrevista feita com o ex-professor dos alunos envolvidos na pesquisa	108
4.3. Análise <i>a priori</i> da sequência de atividades.....	109
4.3.1. Sessão I - Consolidação da ideia de Potências – Análise <i>a priori</i>	109
4.3.2. Sessão II - Explorar o conceito Função Exponencial – Análise <i>a priori</i>	114
4.3.3. Sessão III – Explorar o conceito de Logaritmos – Análise <i>a priori</i>	117
4.3.4. Sessão IV – Funções Inversas – Análise <i>a priori</i>	125
4.4. Descrição e aplicação da Sequência	129
4.5. Análise <i>a posteriori</i>	131
4.5.1. Análise <i>a posteriori</i> da Sessão I.....	132
4.5.2. Análise <i>a posteriori</i> da Sessão II.....	147
4.5.3. Análise <i>a posteriori</i> da Sessão III.....	155
4.5.4. Análise <i>a posteriori</i> da Sessão IV	172
Capítulo V.....	186
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	186
REFERÊNCIAS	195
ANEXOS.....	199
Anexo I - Autorização para a realização da Pesquisa	199
Anexo II - Autorização para a realização de Pesquisa Acadêmica	200

INTRODUÇÃO

Por mais de dois mil anos, ter uma familiaridade com a Matemática foi considerada como parte indispensável da bagagem intelectual de todas as pessoas cultas. O ensino da Matemática tem se degenerado em exercício repetitivo e vazio de solução de problemas, o que pode desenvolver capacidade formal, mas não conduz a uma compreensão ou maior independência intelectual. (COURANT; ROBBINS, 2000).

Muitos professores de Matemática, já devem ter tido a experiência de serem questionados por seus alunos sobre a importância da Matemática e sua utilidade. (ÁVILA, 2007). A justificativa do ensino da Matemática dada aos alunos resume-se muitas vezes na “importância para o desenvolvimento do raciocínio lógico, ou a aplicação em atividades práticas que envolvem os aspectos quantitativos da realidade”.

Esse questionamento sobre a importância da Matemática pelos alunos se deve ao modo de como esta ciência tem sido proposta a esses estudantes, com o propósito de resolver problemas repetitivos mencionados por Courant e Robbins (2000), sem possibilitar a compreensão dos conceitos subjacentes e muito menos favorecer o desenvolvimento da independência intelectual.

Ávila (2007) salienta que o pensamento matemático não deve ser resumido apenas aos seus aspectos lógico-dedutivos, e sim incluir os processos de invenção e descoberta. Em seus aspectos mais criativos, a Matemática depende da intuição e da imaginação, às vezes mais do que da dedução. Para o autor,

A intuição é a faculdade mental que permite obter o conhecimento de maneira direta, sem a intervenção do raciocínio. Os matemáticos frequentemente se referem a algum fato “intuitivo”, querendo com isto dizer que se trata de algo cuja veracidade é facilmente reconhecível. Mas é bom lembrar que “intuitivo” não é sinônimo de “fácil”. Há muitas verdades profundas e difíceis que são apreendidas pela intuição. (ÁVILA, 2007, p. 4)

O ensino da Matemática é justificado pelo autor pela riqueza dos diferentes processos de criatividade proporcionando excelentes oportunidades para o desenvolvimento intelectual do educando e no papel que esta disciplina desempenha na construção de todo o conhecimento humano.

Assim, para atingir plenamente seus objetivos, o ensino desta ciência deve ser feito de maneira a atender certos requisitos básicos:

O ensino deve sempre enfatizar as ideias da Matemática e sua importância no desenvolvimento da própria Matemática. Os diferentes tópicos da Matemática devem ser tratados de maneira a exibir sua interdependência e organicidade. O ensino da Matemática deve ser feito de maneira bem articulada com ensino de outras ciências, sobretudo a Física. (ÁVILA, 2007, p. 9)

E assim, o autor sugere que a cada novo tópico a ser ensinado, o professor sempre que possível, justifique a relevância daquilo que ensina, trazendo frequentemente para suas aulas, histórias, problemas e questões interessantes da história da Matemática, de forma que favoreça ao aluno uma crescente admiração pelo largo alcance da Matemática.

Ao longo da Educação Básica, o ensino das Funções possui um grande espaço no Currículo na disciplina de Matemática. Contudo, resultados de pesquisas que descreveremos nos próximos capítulos, apontam que o conceito de função não é bem compreendido pelos alunos, e muitas vezes esses chegam ao Ensino Superior com dificuldades na compreensão e reconhecimento das funções elementares que são estudadas no Ensino Médio.

O presente estudo teve como objetivo elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática utilizando o *software* GeoGebra como uma estratégia pedagógica.

Escolhemos o objeto matemático Função Logarítmica, devido muitas vezes ter sido questionada por nossos alunos de qual a relevância de se estudar este tópico e as dificuldades que os alunos em geral se deparam quando estão diante de situações-problema que envolve essa função.

Assim, esta pesquisa foi organizada em cinco capítulos, referências e anexos.

No capítulo I, descreveremos a problemática que nos conduziu às questões de pesquisas e aos nossos objetivos. Tais objetivos surgiram de nossas reflexões de que ao propor uma sequência didática, os alunos conseguem reconhecer alguns elementos fundamentais para o estudo da função logarítmica, tais como domínio, imagem e o esboço do gráfico? Em que medida? Quais as dificuldades encontradas? Quais avanços percebidos? O uso do *software* GeoGebra como estratégia didático-pedagógica no estudo das funções exponenciais e logarítmicas contribuiu ou não para a aprendizagem dos alunos?

Para subsidiar essa pesquisa no capítulo II, apresentaremos o referencial teórico, fundamental para o desenvolvimento deste estudo, que são a Teoria dos Registros de Representações Semiótica (DUVAL, 2009), os Processos do Pensamento Matemático Avançado (DREYFUS, 1991) e os pressupostos da Engenharia Didática (ARTIGUE, DOUADY, MORENO, 1995) como o referencial metodológico.

Uma das fases descritas pela Engenharia Didática são os estudos preliminares que relataremos no capítulo III. Analisamos como o ensino de funções logarítmicas é sugerido pelos documentos oficiais, os resultados de pesquisa inerentes ao tema, tais como Karrer (1999), Ferreira (2006), Saldanha (2007), Lima (2009), um breve estudo histórico da invenção dos logaritmos e a relação da quadratura da hipérbole com a função logarítmica. (MAOR, 2008)

No capítulo IV denominado como Procedimentos Metodológicos, descreveremos como o ensino da Função Logarítmica é abordado no caderno do Professor de Matemática, publicado pela Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo e disponibilizado aos professores de Matemática no ano de 2009. A fim de fazer uma sondagem de quais conhecimentos prévios os alunos participantes desta pesquisa apresentam, relataremos a entrevista feita com o ex-professor destes alunos. Apresentaremos as análises *a priori* das atividades que compõem a sequência didática, a descrição da aplicação da sequência realizada com seis alunos do 3º ano do Ensino Médio e as análises *a posteriori*.

No capítulo V, apresentaremos nossas Considerações Finais sobre o estudo, as respostas que obtivemos para nossas questões de pesquisas e as indagações e reflexões que surgiram ao longo da elaboração deste trabalho.

Capítulo I

DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA E OBJETIVO

Justificativa e Motivações para o estudo

O ensino de Funções é um dos assuntos que acompanha a trajetória dos alunos desde o Ensino Fundamental, sendo ampliado esse universo de estudo durante o Ensino Médio e constitui-se como subsídio fundamental para os estudantes que ingressam em diversos cursos no Ensino Superior.

O conceito de função permeia grande parte da matemática e, desde as primeiras décadas do século presente, muitos matemáticos vêm advogando seu uso como princípio central e unificador na organização dos cursos elementares de matemática. O conceito parece representar um guia natural e efetivo para a seleção e desenvolvimento do material de textos de matemática. Enfim, é inquestionável que quanto antes se familiarize um estudante com o conceito de função, tanto melhor para sua formação matemática (EVES, 2008, p. 661).

Apesar de ser um assunto proposto pelos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM¹, BRASIL, 1999) na estrutura curricular na disciplina de Matemática no Ensino Médio, em especial no primeiro e terceiro ano, há pesquisadores que apontam em seus resultados de pesquisas que há diversas dificuldades de aprendizagem deste conceito por alunos que ingressam no Ensino Superior, tais conceitos são alicerces para futuros tópicos a serem desenvolvidos ao longo do curso.

Para identificar alguns elementos que pudessem evidenciar ou fornecer subsídios sobre as concepções dos alunos, referentes à noção de função ao ingressarem no primeiro ano do Ensino Superior, Bianchini e Puga (2006) realizaram uma pesquisa diagnóstica com 79 alunos matriculados na disciplina de

¹ Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio. Brasil, 1999.

CDI (Cálculo Diferencial e Integral) do curso de Ciência da Computação. Utilizaram como fundamentação teórica a noção de Registros de Representação Semiótica concebida por Duval (2003).

O instrumento de pesquisa foi elaborado por questões abertas sobre o conceito de função e representações de algumas funções no registro gráfico que as pesquisadoras acreditavam ser familiares aos alunos durante o Ensino Médio e outras não tão familiares como as cônicas, que somente são trabalhadas no terceiro ano. Dos resultados obtidos as autoras afirmaram que os alunos que mobilizaram a coordenação de dois ou mais registros de representação semiótica obtiveram um melhor desempenho do que aqueles que utilizaram apenas um registro de representação semiótica. O confronto entre os resultados da pesquisa com o referencial teórico utilizado apontou o que Duval (2003) afirma sobre a necessidade da coordenação de pelo menos dois registros de representação para que haja a compreensão de um conceito. E destacaram que:

[...] Notamos, também, a necessidade de explorar mais detidamente desde o Ensino Médio, o estudo de outras funções, além das funções afim e quadráticas. Isso se justifica tendo em vista que os resultados obtidos revelaram que os alunos não apresentaram um desempenho satisfatório, mesmo em relação àquelas funções estudadas anteriormente. (BIANCHINI; PUGA, 2006, p. 13)

Outra pesquisa relacionada ao desempenho e dificuldades dos alunos do 3º período do curso de Engenharia Industrial Têxtil, foi realizada por Nasser (2006) que teve como objetivo analisar o progresso de alunos na disciplina de Cálculo no que diz respeito ao traçado dos gráficos de funções reais de uma e duas variáveis. Segundo a autora:

O foco deste estudo é nas deficiências e dificuldades dos alunos de Cálculo no traçado de gráficos de funções básicas. Observamos que os alunos chegam à Universidade com muitas dificuldades, provenientes da falta de experiências prévias do traçado e análise de gráficos, no Ensino Fundamental e Médio. (NASSER, 2009, p. 46).

A autora salienta que grande parte dos sujeitos da pesquisa afirmou ter tido pouca ou nenhuma experiência anterior na aprendizagem de gráfico. As diversidades de experiências prévias em Matemática ficaram evidentes nas

dificuldades apresentadas pelos alunos, principalmente no cálculo algébrico, operações com frações, números decimais e radicais, visualização espacial e a dificuldade de justificar as respostas apresentadas. A estratégia de ensino foi constituída por meio de transformações no plano, tendo como ponto de partida os gráficos que lhes eram familiares tais como $y = x$ e $y = x^2$. A partir desses gráficos os alunos foram incentivados a aplicar transformações para obter outras retas e parábolas.

Em suas considerações finais a autora relata que ao utilizar a estratégia de transformações no plano da disciplina de Cálculo II, os alunos que participaram da pesquisa sentiram segurança para traçar gráficos de funções que representam retas, parábolas e curvas dos tipos exponenciais e logarítmicas, mas não foram tão eficazes no que se refere à superfície definida implicitamente por uma equação de três variáveis.

Por meio dos resultados das pesquisas citadas acima, há indícios de que os alunos que terminam o Ensino Médio apresentam muitas lacunas no que diz respeito ao estudo de função, suas diversas representações e sobre a sua aplicabilidade em outras áreas do conhecimento.

O interesse pela leitura de resultados referentes às pesquisas sobre o Ensino de Função originou-se ao frequentar o curso de Especialização em Educação Matemática da PUC-SP. Como parte obrigatória para a conclusão do curso, produzimos uma monografia que teve como objetivo realizar um estudo diagnóstico com alunos do 1º ano do Ensino Médio cujo tema foi a Função Exponencial e a análise das dificuldades apresentadas pelos alunos deste objeto matemático.

Este primeiro contato com a pesquisa nos motivou a buscar subsídios que pudessem minimizar essas dificuldades e continuar o aprofundamento teórico de como propiciar atividades matemáticas de forma que o aluno compreendesse o conceito de função, suas diversas formas de representações e como utilizar o uso das Tecnologias como estratégia de ensino.

A fim de verificar o que já foi pesquisado sobre Funções, fizemos a leitura da dissertação intitulada “*Ensino e Aprendizagem do Conceito de Função:*

Pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil (ARDENGHI, 2008). O autor realizou um levantamento bibliográfico e encontrou um total de 46 produções científicas incluindo dissertações de mestrado, teses e artigos científicos sobre o conceito de Função realizadas no Brasil.

Das produções analisadas por Ardenghi (2008), observamos que existem muitas pesquisas sobre função afim e quadrática e poucas sobre função exponencial e logarítmica.

Como professora do Ensino Médio, percebemos a existência de muitas dificuldades no processo ensino e aprendizagem das funções exponenciais e logarítmicas. Muitas vezes o ensino restringe-se apenas ao estudo das funções afim e quadráticas, e as funções exponenciais e logarítmicas não são trabalhadas no 1º ano do Ensino Médio, deixando de ser ensinadas pelo fato de terminar o ano letivo e não serem retomadas no ano seguinte. Esse fato pôde ser constatado em uma conversa informal com vários professores de Matemática do Ensino Médio.

Desta forma, o interesse pelo estudo da função logarítmica despertou inicialmente por meio de minha experiência como professora do Ensino Médio. Acreditamos que o estudo desta função não pode deixar de ser ensinado aos alunos neste nível de ensino. Por um lado encontramos vários modelos matemáticos que se utilizam deste objeto para modelar fenômenos naturais, tais como *pH* de soluções químicas, escalas para medir a intensidade de terremotos entre outros e, por outro lado, os alunos que ingressarem no Ensino Superior poderão ter dificuldades ao se depararem com o estudo dessa função.

Ao fazer parte do curso de Mestrado Acadêmico do Programa de Pós-Graduados *stricto sensu* em Educação Matemática da PUC-SP, houve uma motivação em buscar pesquisas realizadas sobre Funções Logarítmicas e estabelecer uma relação entre a nossa assertiva com os resultados das pesquisas sobre o assunto.

Este trabalho faz parte da linha de pesquisa “*A Matemática na Estrutura Curricular e Formação de Professores*” que tem como preocupação investigar o papel da Matemática na estrutura curricular na Educação Básica, reflexão dos

professores sobre sua prática docente e as relações professor – aluno – saber matemático.

Fazemos parte do grupo de pesquisa denominado GPEA (Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica da PUC-SP) coordenado pelas pesquisadoras Dra. Silvia Dias Alcântara Machado, Dra. Maria Cristina de Souza Albuquerque Maranhão e Dra. Barbara Lutaif Bianchini.

As discussões e produções científicas produzidas pelos integrantes do grupo têm por objetivo investigar visões, tendências no ensino e seus impactos na aprendizagem da Álgebra nos diversos segmentos de ensino fundamentado pelo projeto de pesquisa “Qual a Álgebra a ser ensinada na formação de professores?”. Após a leitura deste projeto ficou clara a relevância da pesquisa no campo da Álgebra devido às mudanças pedagógicas e curriculares norteadas por visões construtivistas nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.

É necessário que o professor de Matemática tenha domínio do conteúdo a ser ensinado, mas também é fundamental que se tenha o conhecimento de como e quais processos cognitivos são necessários para que o estudante construa o seu conhecimento e como o professor irá articular o saber a ser ensinado de forma que se favoreçam esses processos para que o aluno tenha sucesso não somente na Álgebra, mas em todos os campos da Matemática.

Deste modo acreditamos na relevância da formação continuada do professor de Matemática para acompanhar as mudanças curriculares e as mudanças na forma de como a Matemática pode ser ensinada de maneira que o aluno construa seu conhecimento de forma autônoma.

Nosso trabalho está inserido no projeto “Estudo das concepções acerca das relações” que tem por finalidade investigar as concepções dos estudantes e professores de matemática acerca das relações algébricas. Constitui-se em um dos eixos de estudo do projeto: “O que se entende por álgebra?”, que focaliza concepções de professores e estudantes em temas centrais da álgebra do ensino básico.

Temos como hipótese que ao elaborar uma sequência didática propondo situações-problema que explorem a coordenação entre os diversos de registros de representações semiótica de um objeto matemático pode possibilitar a aprendizagem do objeto em estudo.

Nossos objetivos consistem em elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática para o ensino da função logarítmica propiciando atividades que contemplem a coordenação de diversos registros segundo a Teoria de Registros de Representação e Semiótica, conforme Duval (2009), utilizar o *software* GeoGebra e a calculadora científica para favorecer estratégia didático-pedagógica de ensino, ou seja, fazer o uso destas tecnologias de forma planejada com objetivos previamente estabelecidos de forma que o estudante possa desenvolver os processos de: observar, conjecturar, levantar hipóteses, generalizar e abstrair, tais processos são importantes para o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado (DREYFUS, 1991).

Portanto nossas questões de pesquisas consistem em analisar se:

1. Os alunos com a sequência didática proposta neste trabalho conseguem reconhecer alguns elementos fundamentais para o estudo da função logarítmica, tais como domínio, imagem e o esboço do gráfico? Em que medida? Quais as dificuldades encontradas? Quais avanços percebidos?

2. O uso do *software* GeoGebra como estratégia didático-pedagógica no estudo da função logarítmica contribuiu ou não para a aprendizagem dos alunos?

Para o desenvolvimento desta pesquisa utilizaremos como referencial metodológico os pressupostos da Engenharia Didática (ARTIGUE; DOUADY; MORENO, 1995), que possui quatro fases: análises preliminares, análise *a priori*, experimentação, análise *a posteriori* e validação.

No próximo capítulo apresentaremos os referenciais teóricos e metodológicos que subsidiaram todo o processo de elaboração e realização deste trabalho.

Capítulo II

REFERENCIAL TEÓRICO E METODOLÓGICO

Acreditamos que o professor de matemática ao fazer escolhas das atividades a serem propostas aos estudantes e avaliar o processo de ensino e aprendizagem de um determinado objeto matemático, necessita conhecer quais são os processos cognitivos que possivelmente desencadearão uma aprendizagem em matemática. Assim eles provavelmente entenderiam as possíveis dificuldades que seus alunos podem encontrar na solução de uma situação-problema.

A fim de tentar compreender alguns desses processos estariam subjacentes às dificuldades de aprendizagem da função logarítmica, este trabalho está norteado pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica descrito por Duval (2009) e pelos Processos do Pensamento Matemático Avançado segundo Dreyfus (2001).

Como referencial metodológico, utilizaremos os pressupostos da Engenharia Didática segundo Artigue, Douady e Moreno (1995).

2.1. Os Registros de Representação Semiótica

A noção de representação para o estudo do conhecimento foi introduzida em três retomadas, com enfoques diferentes da natureza do fenômeno designado.

Como representação **mental** focalizando as crenças e as explicações das crianças pequenas. Piaget desenvolveu este estudo disposto a entender os fenômenos naturais e psíquicos. Outra noção de representação dada como **“evocação dos objetos ausentes”** para caracterizar a novidade do último dos

estágios da inteligência sensorial-motora (PIAGET² 1930 apud DUVAL, 2009, p. 30).

O segundo enfoque dado ao significado de representação como representação **interna** ou **computacional**, com as teorias priorizando o tratamento, de forma que a informação fosse recebida e produzida como uma resposta adaptada. Um dos iniciadores pode ter sido Broadbent³ (1958 apud DUVAL, 2009, p. 31). Neste ponto de vista a noção de representação pode ser vista como a forma de uma informação ser constituída, como um sistema de “codificação da informação”.

A representação como **semiótica**, está presente no quadro de trabalhos sobre a aquisição de conhecimentos matemáticos e os problemas de aprendizagem.

[...] A especificidade das representações semióticas consiste em serem relativas a um sistema particular de signos, a linguagem, a escritura algébrica ou os gráficos cartesianos, e em poderem ser convertidas em representações “equivalentes” em outro sistema semiótico, mas podendo tomar **significações** diferentes para o sujeito que as utiliza. A noção de representação semiótica pressupõe, então, a consideração de sistemas semióticos diferentes e de uma operação cognitiva de conversão das representações de um sistema semiótico para um outro. Essa operação tem sido primeiramente descrita como uma “mudança de forma”. (DUVAL, 2009, p. 32 grifo do autor).

Neste contexto, se o professor propor ao aluno: “Dado o gráfico de uma função f representado em um sistema cartesiano ortogonal, escreva sua respectiva expressão algébrica” ou interpretar um enunciado de uma situação-problema e solicitar que o aluno a represente por meio de diagramas, isto consiste no que o autor chama mudança da forma pela qual um conhecimento é representado.

A aprendizagem da matemática constitui um campo privilegiado para a análise dos processos cognitivos importantes durante a resolução e interpretação de situações-problema, no desenvolvimento do raciocínio lógico e dedutivo e para a compreensão de conceitos referentes aos objetos matemáticos.

² Piaget, J. Etudes sur la logique de l' enfant I, le langage et la pensée chez l' enfant. Neuchatel: Delachaux et Niestlé.

³ Broadbent, D. E. Perception and Communication. Londres: Pergamon Press.

O uso de diversas formas de representar um mesmo objeto, além da língua materna ou das imagens, tais como tabelas, gráficos, símbolos, diagramas, escritas algébricas, esquemas, são atividades cognitivas necessárias para a aprendizagem em matemática. Para tanto, Duval (2009, p.14) analisa dois argumentos para responder a seguinte questão: “O uso de muitos sistemas semióticos de representação e de expressão é essencial ou, ao contrário, é apenas cômodo, secundário, para o desenvolvimento das atividades cognitivas fundamentais?”. Essa questão ultrapassa o domínio da matemática e sua aprendizagem, mas trata da natureza do funcionamento cognitivo humano.

O autor defende ao argumentar que “não se pode ter compreensão em matemática, se nós não distinguirmos um objeto de sua representação” (DUVAL, 2009, p.14).

No caso da função logarítmica, para que haja uma compreensão do seu conceito, é necessário que o estudante conheça as diferentes representações deste objeto, suas condições de existência, compreenda essa função como a inversa da função exponencial e o comportamento do seu gráfico. De forma que o uso da pluralidade potencial das diversas formas de representações semióticas não seja confundido com o objeto em questão possibilitando uma aprendizagem conceitual. Duval afirma que: “toda confusão entre o objeto e sua representação provoca, com o decorrer do tempo, uma perda de compreensão” (DUVAL, 2009, p.14). Caso isso aconteça, essas representações semióticas dos objetos matemáticos seriam secundárias e extrínsecas, pois os conhecimentos tornam-se rapidamente esquecidos fora do contexto de aprendizagem.

O segundo argumento apresentado pelo pesquisador está relacionado com a existência das representações mentais, definido como o conjunto de imagens e conceitos que um indivíduo pode ter sobre o objeto. Essas representações mentais estão interligadas com as representações semióticas, como um meio de comunicação para o indivíduo exteriorizar tornando-se visíveis e acessíveis com o meio exterior.

Se chamamos de *semiósisis* a apreensão ou a produção de uma semiótica, e *noésisis* os atos cognitivos como apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência, pareceria então evidente admitir que a *noésisis* é independente da *semiósisis* ou, ao menos, a dirige. (DUVAL, 2009, p. 15)

Para ocorrer a aprendizagem da matemática segundo Duval, as representações semióticas não são apenas imprescindíveis para a comunicação, mas também nos procedimentos para efetuar os tratamentos sobre os objetos matemáticos. Esses tratamentos dependem do sistema do funcionamento cognitivo do pensamento: a *noésis* (aquisição conceitual de um objeto) é independente da *semiósisis* (representações por meio de signos), ou seja, a *noésis* independe dos recursos da pluralidade dos sistemas semióticos que implicam na coordenação do indivíduo.

Desta forma, os procedimentos do cálculo com logaritmos, por exemplo, dependem do cálculo numérico utilizando conceitos envolvendo a multiplicação e potenciação, dependendo da escrita escolhida, seja representação decimal, binária ou fracionária. Para o autor, os tratamentos não podem ser efetuados independentes de um sistema semiótico de representação. E essa função pode ser completada apenas por representações semióticas e não pelas representações mentais. O uso das representações semióticas parece ser intrínseco pelo indivíduo nas atividades matemáticas.

Contudo, a mudança de forma de uma representação revela ser para muitos alunos nos diferentes níveis de ensino, muitas vezes uma operação difícil e até mesmo impossível. Como se a compreensão de um conteúdo ficasse limitada à forma de representação. Essa foi a constatação feita por Schoenfield, na qual cita a “compartimentalização” inapropriada, pois seus estudantes não fizeram conexões entre domínios e sistema de símbolos de conhecimentos adquiridos. (Duval, 2009, p. 35).

Para Duval, representar o conteúdo considerando a *noésis* dependente da *semiósisis*, pode diminuir a dificuldade da conversão, provoca uma reflexão no papel da *semiósisis* no funcionamento do pensamento, e também suscita a questão de diferenciar o representante do representado, nas representações semióticas.

O modo como o funcionamento do pensamento e de como o conhecimento se desenvolve está na variedade dos tipos de signos que podem ser utilizados e não no emprego deste ou daquele tipo de signo. Desse modo, segundo o autor, os sistemas semióticos devem permitir três atividades cognitivas inerentes a toda representação.

Na nossa pesquisa podemos ilustrar as três atividades cognitivas da seguinte forma: primeiramente ao propor uma situação-problema que necessite do conceito de função logarítmica na base 2 e para solucioná-la é necessário que o estudante faça uma mudança de registro da língua natural para o registro algébrico, de forma que se obtenha $\log_2 x = 10$, será necessário que o estudante mobilize outros conceitos e compreenda qual é o expoente x para que se tenha $2^x = 10$ empregando as regras próprias em um mesmo sistema, neste caso, o sistema de escrita algébrica. Logo após, solicitar que se faça esboço do gráfico de uma função definida por $y = 2^x$ e $y = \log_2 x$ em um mesmo sistema de eixo cartesiano de forma que se favoreçam outras representações, para que se possa construir uma relação de comparação às representações iniciais, podendo estabelecer a relação que a função logarítmica é função inversa da exponencial.

Enfim, converter as representações produzidas em um sistema em representações de outro sistema, de tal maneira que estas últimas permitam explicar outras significações relativas ao que é representado. (DUVAL, 2009, p. 37).

Mas todos os sistemas semióticos não permitem essas três atividades cognitivas fundamentais, por exemplo, o Morse ou o código da rota.

No entanto, a linguagem natural, as línguas simbólicas, gráficos, as figuras geométricas, etc. permitem essas atividades e Duval as define como registro de representação semiótica.

Tais registros constituem os graus de liberdade de que um sujeito pode dispor para objetivar a si próprio uma ideia ainda confusa, um sentimento latente, para explorar informações ou simplesmente para poder comunicá-las a um interlocutor. A questão da relação entre *semiós* e *noésis* concerne somente aos sistemas que permitem essas três atividades de representação e não a todos os sistemas semióticos. (DUVAL, 2009, p. 37)

Os obstáculos e o progresso analisados no desenvolvimento do raciocínio, aquisição de tratamentos lógicos e matemáticos e da compreensão dos textos encontrados nas representações fundamentais, confrontam três fenômenos que parecem intimamente ligados:

1) A diversificação dos registros de representação semiótica em que a linguagem natural e as línguas simbólicas não podem ser consideradas como partes integrantes de um mesmo registro, assim como, os esquemas, figuras

geométricas, os gráficos cartesianos ou as tabelas, pois são sistemas diferentes que possuem questões de aprendizagens específicas.

2) A diferenciação entre o representante e o representado, na qual essa diferenciação está ligada ao fato da compreensão do que uma representação concebe e a possibilidade de relacioná-la a outras representações e integrá-las nos procedimentos de tratamento.

3) A coordenação entre os diferentes registros de representação semiótica disponíveis: o conhecimento da correspondência entre as regras de dois sistemas semióticos não é suficiente para que eles possam ser mobilizados e utilizados juntos. A grande dificuldade na coordenação desses registros é a importância dos fenômenos de não congruência entre as representações produzidas em sistemas diferentes que explicaremos mais adiante.

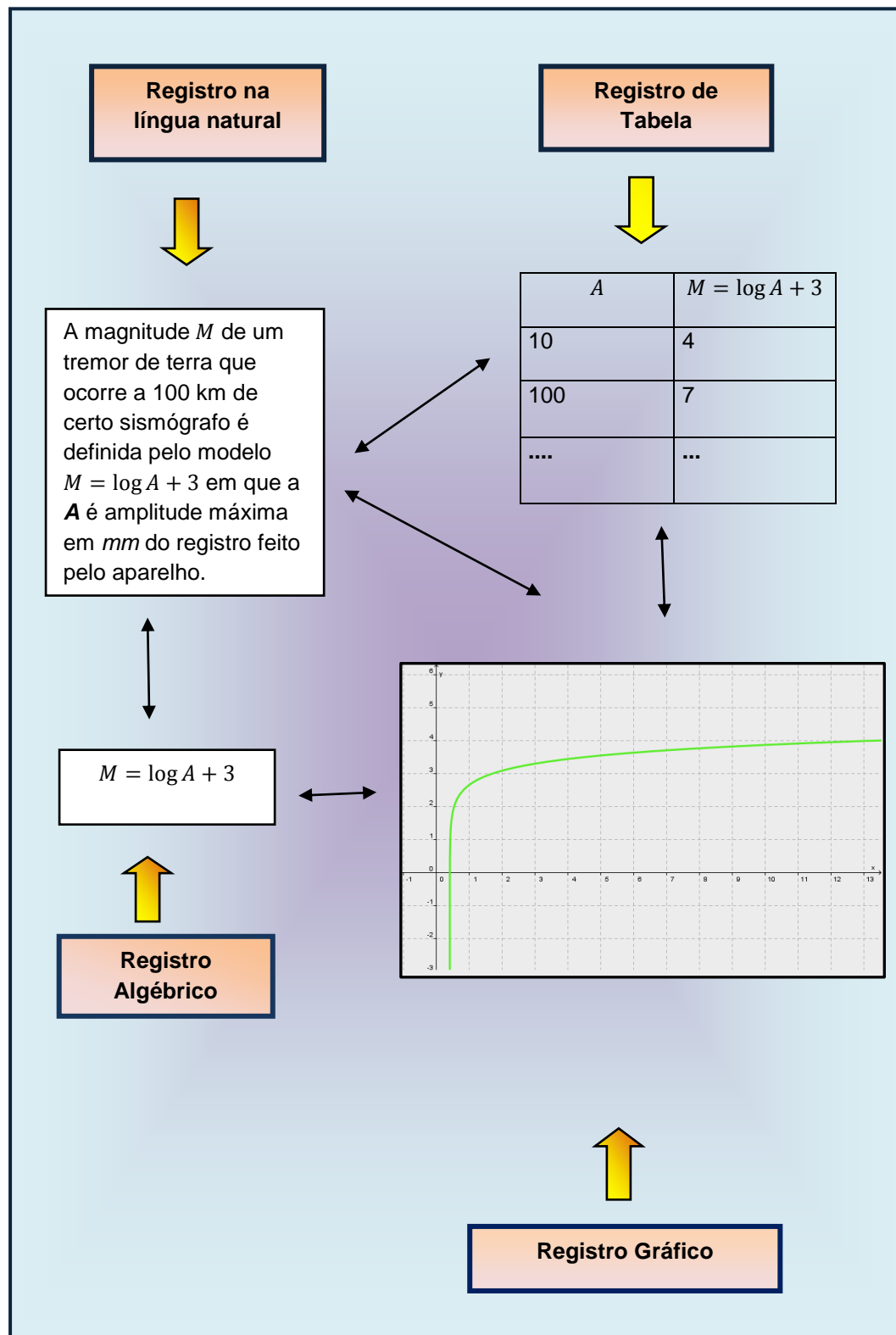


Figura 1 - Coordenação entre os Registros de Representação Semiótica.

Fonte: Elaborada pela autora.

Para o estudo das aprendizagens intelectuais fundamentais devem ser considerados esses três fenômenos relativos à *semiós* e a operação de conversão que vem do processo cognitivo do indivíduo.

Nos sujeitos, uma representação pode verdadeiramente funcionar como representação, dar-lhes acesso ao objeto representado apenas quando duas condições são preenchidas: que eles disponham de ao menos dois sistemas semióticos diferentes para produzir a representação de um objeto, de uma situação, de um processo [...] e que eles possam converter “espontaneamente” de um sistema semiótico a outro, mesmo sem perceber as representações produzidas. (DUVAL, 2009, p.38)

Quando essas duas condições não acontecem, o objeto representado é confundido com sua representação, e duas representações diferentes de um objeto não podem ser reconhecidas como a representação de um mesmo objeto.

No contexto da nossa pesquisa, uma função do tipo $y = 2^x$ pode ser confundida com uma função do tipo $y = x^2$, caso o estudante não compreenda que na primeira função a variável independente está no expoente e a segunda função, a variável independente, está na base. Esse fato pode ser mais acentuado caso o estudante não conheça a representação dessas duas funções no registro gráfico.

Duval define o tratamento como:

[...] uma transformação que se efetua no interior de um mesmo registro, aquele onde as regras de funcionamento são utilizadas; um tratamento mobiliza apenas um registro de representação. A conversão é, ao contrário, uma transformação que se efetua ao passar de um registro a outro. Ela requer então a coordenação dos registros no sujeito que a efetua. “O estudo dessa atividade de conversão deve então apenas permitir compreender a natureza de um laço estrito entre *semiós* e *noés*” (DUVAL, 2009, p. 39).

No caso do exemplo acima, a conversão do registro algébrico para gráfico é importante e não apenas focalizar tratamentos em um mesmo sistema de registro e enfatizar procedimentos de técnicas algébricas, e somente após o estudante dominar esses tratamentos realizar a conversão para o registro gráfico.

É necessário que o professor priorize nas atividades a serem ensinadas a conversão de diferentes registros de um mesmo objeto de forma alternada, para que fique clara a diferença entre o objeto e sua representação.

Segundo o autor, ao separar as atividades de tratamento e as de conversão, é fácil notar as dificuldades suscetíveis referentes ao processo de conversão e a importância de fechamento dos registros. As questões centrais para as aprendizagens intelectuais aparecem na possibilidade de favorecer a coordenação dos registros. E esta coordenação é simplesmente a consequência da aprendizagem de um conceito.

2.1.1. Classificação dos diferentes tipos de representações

Para caracterizar as representações Duval menciona que alguns pesquisadores da psicologia cognitiva recorrem a uma das duas oposições clássicas dos fenômenos cognitivos: a oposição consciente/não consciente e a oposição interna/externa.

A oposição consciente/não consciente é aquela em que o indivíduo toma consciência intrinsecamente enquanto a outra lhe escapa completamente o que ele não pode notar. A passagem do não consciente ao consciente é um processo de objetivação para o sujeito tomar consciência, ou seja, corresponde à descoberta por si mesmo de alguma coisa que até então ele não havia notado, mesmo que alguém lhe houvesse explicado. As representações conscientes apresentam caráter intencional e que completam uma função de objetivação, sendo essencial do ponto de vista cognitivo, pois para fazer a apreensão perceptiva ou conceitual de um objeto é necessária a significação dos objetos remarcados pelo sujeito.

Significação e estatuto de “objeto suscetível de ser visto ou apreendido por alguém” são os dois aspectos recíprocos de toda representação consciente. A significação é a condição necessária de objetivação para o sujeito, isto é, da possibilidade de tomar consciência. (DUVAL, 2009, p. 41)

A oposição externa/interna é a aquela que um indivíduo vê e observa o que não é visível e observável. Todas as representações ditas como “externas” são produzidas por um sistema ou pelo sujeito. A produção de uma representação externa pode apenas se efetuar por meio da utilização de um sistema semiótico e está estreitamente ligada a um domínio e estado de desenvolvimento de um

sistema semiótico, sendo acessível a todos os sujeitos que aprenderam o sistema semiótico utilizado.

As representações internas pertencem a um sujeito e não são comunicadas a outro pela produção de uma representação externa. Esta possui a função de comunicação, assim como a função de objetivação, como todas as representações conscientes e a função de tratamento.

A função de objetivação intrínseca é quase sempre assimilada àquela de expressão para o outro.

As representações externas são essenciais para a função de tratamento que estão intimamente ligadas à utilização de um sistema semiótico. Ao desenvolver o binômio $(x + 1)^2$ de forma que fique $x^2 + 2x + 1$ tem-se um exemplo da função de tratamento no registro algébrico.

Uma representação interna pode ser consciente ou não consciente, enquanto que uma representação consciente pode ser, ou não, exteriorizada. O cruzamento dessas duas oposições permite distinguir três grandes tipos de representações:

	Interna	Externa
Consciente	Mental Função de objetivação	Semiótica Função de objetivação de expressão e função de tratamento intencional
Não Consciente	Computacional Função de tratamento automático ou quase instantâneo	

Figura 2 - Tipos e funções de representações.
Fonte: Duval, 2009 p. 43.

As representações semióticas são ao mesmo tempo conscientes e externas, e permitem uma “visão do objeto” por meio de estímulos, tendo valor de “*significante*”. Existe uma variedade de representações semióticas tais como: gráficos, figuras, esquemas, expressões linguísticas entre outras. Essas representações são divididas em analógicas (imagens que, por exemplo,

possuem relações e características segundo um modelo existente) e as representações não analógicas, como as línguas, que não conservam nenhuma relação do modelo.

Os diferentes registros de representação se diferenciam não somente pela natureza de seus significantes, mas também pelo sistema de regras que autoriza sua associação e pelo número de dimensão em que se pode efetuar essa associação. (DUVAL, 2009, p.44)

Já as representações mentais são todas as que permitem uma visão do objeto sem que haja um significante perceptível, são identificadas as “imagens mentais” como entidades psicológicas tendo uma relação com a percepção.

Contudo, as representações possuem um domínio mais amplo do que o das imagens. É necessário relacionar conceitos, ideias, crenças e todas as projeções e os valores que um sujeito divide com o seu meio, grupo particular ou as que refletem seus próprios desejos.

As representações mentais e as semióticas podem ser diferenciáveis no que concerne à produção e expressão de suas representações mentais, pois corresponde à independência das duas funções de objetivação e de representação que preenchem todas as representações conscientes, isto é, as representações semióticas como representações mentais.

[...] A objetivação, que corresponde à formação de representações mentais novas, é acompanhada de uma produção de representações semióticas, podendo frequentemente parecer insuficiente, inaceitável ou incompreensível do ponto de vista da função, pode ser satisfatória do ponto de vista da função de expressão. Ao contrário, a produção de representações semióticas pode ser satisfatória do ponto de vista de expressão, e não corresponder a nenhuma objetivação para o sujeito que as produz mais por imitação do que as produz por objetivação. (DUVAL, 2009 p. 46).

Outra diferença a ser destacada é o grau de liberdade que as representações semióticas apresentam, enquanto as representações mentais não o possuem, pois se limita a única visão, a do que é representado. Essa diferença é primordial, pois as representações mentais não se prestam a tratamentos a não ser pela mobilização de um registro semiótico e da prática “mental” desse registro. A existência da diversidade dos sistemas semióticos, as representações semióticas de um mesmo objeto revelam-se decisivas do ponto de vista da função de tratamento e do ponto de vista da conceituação.

O autor chama de representações computacionais aquelas em que os significantes não requerem visão de objeto, e que permitem uma transformação algorítmica de uma sucessão de significantes em outra, nas quais traduzem a informação externa a um sistema sob uma forma acessível no interior desse sistema. Do ponto de vista cognitivo, no que concerne ao sujeito humano, as representações internas não são conscientes.

Embora a existência de várias representações não seja contestada, sua importância para a explicação dos processos cognitivos é muitas vezes negligenciada e talvez a especificidade e a importância das representações semióticas que se acredita serem desconhecidas. (DUVAL, 2009, p. 48).

Segundo Duval (2009) a produção de imagens mentais depende de processos psíquicos ou psicológicos semelhantes aos da percepção, o que os diferencia das representações semióticas que são submetidas ao respeito de regras “sintáticas” de formação de tratamento de unidades significantes.

Por outro lado, a Psicologia Cognitiva privilegia as representações não conscientes, isto é, as representações computacionais, subordinando as outras duas (mentais e semióticas).

2.1.2. Representações Semióticas, tipos de tratamentos e a aprendizagem

Embora as representações computacionais sejam parecidas com as representações semióticas, elas não são da mesma natureza, pois estas são representações conscientes, intimamente ligadas à visão de que se tenha qualquer coisa como consequência da ação do objeto, enquanto que as primeiras são representações internas e independentes da visão que se tem do objeto. Essa diferença é explicada por Duval (2009) pela existência de dois tipos de tratamentos dos quais a complementaridade é indispensável para o funcionamento e o desenvolvimento do pensamento humano.

Os **tratamentos quase instantâneos** são aqueles efetuados antes mesmo de terem sido marcados e que produzem as informações e as significações em que um sujeito tem imediatamente consciência. (DUVAL, 2009, p.50).

[...] Já os **tratamentos intencionais** ao menos o tempo de um controle consciente para serem efetuados e que se apoiam exclusivamente sobre os dados provisoriamente remarcados, numa percepção furtiva do objeto. (DUVAL, 2009, p.52 grifo do autor).

Os tratamentos *quase instantâneos* correspondem à familiaridade ou à experiência resultante de longa prática adquirida em um domínio e possuem caráter imediato ou evidente de uma apreensão, perceptiva ou conceitual.

Os tratamentos *intencionais* são apenas apoiados sobre o que o sujeito "vê" quase que de maneira instantânea, porém não podem ser alternados um depois do outro. *A capacidade de tratamento intencional é, ao mesmo tempo, restrita e não extensível em todos os sujeitos, qualquer que seja seu nível de conhecimento.* (DUVAL, 2009, p. 52).

Segundo o autor é por meio da complementaridade desses dois tratamentos que toda atividade cognitiva humana se repousa. A diferença das *performances* cognitivas entre os sujeitos depende da diversidade e da manipulação dos tratamentos quase instantâneos. Quanto mais há possibilidade desses tratamentos num domínio, mais o número de elementos imediatamente integrados e relacionados de uma informação são maiores e mais epistêmicos. Sendo assim, sem esses tratamentos quase instantâneos não haveria construção do conhecimento de forma hierárquica e sua função é fornecer à "percepção imediata" da consciência das unidades informacionais cada vez mais ricas para que essa possa ver objetos mais complexos e gerais. "A aquisição de novos tratamentos quase instantâneos aparece então como a condição de todo progresso qualitativo da aprendizagem. Porém essa aquisição passa necessariamente por uma fase de tratamentos intencionais" (DUVAL, 2009, p. 52-53).

2.1.3. As atividades cognitivas de representação ligadas à *semiósis*

A **formação** de representações é a primeira atividade cognitiva ligada à *semiósis* em um registro semiótico particular. É uma forma de possibilitar a representação mental de um objeto real. Essa formação implica na seleção do conjunto de caracteres e determinações para a representação deste objeto na qual se quer representar.

A compreensão em matemática implica na capacidade de mudar de registro, pois não se deve confundir um objeto e sua representação. A evolução dos conhecimentos matemáticos conduziu ao desenvolvimento e à diversificação

de registros de representações (DUVAL, 2003 p. 21), ou seja, a mudança de um registro de representação a outro não é somente mudar de modo de tratamento, mas explicar as propriedades ou aspectos diferentes de um mesmo objeto. Isso implica que duas representações de um mesmo objeto produzidas em dois registros, não tem de forma alguma o mesmo conteúdo. (DUVAL, 2003, p. 22)

A dificuldade se deve ao fato de que o objeto representado não pode ser identificado com o conteúdo da representação que o torna acessível.

Esse fato foi constatado em uma pesquisa feita por Espinosa (1995), ao realizar um estudo com professores de Matemática de nível médio e superior no México. Esta pesquisa teve como objetivo detectar erros ao fazer mudanças de diferentes representações, tais como: a representação do gráfico de uma função para outra (desenhos de recipientes) e vice-versa. O instrumento de pesquisa foi elaborado a partir das estratégias de aprendizagens baseadas nas investigações realizadas por Adda (1987) conforme Figura abaixo:

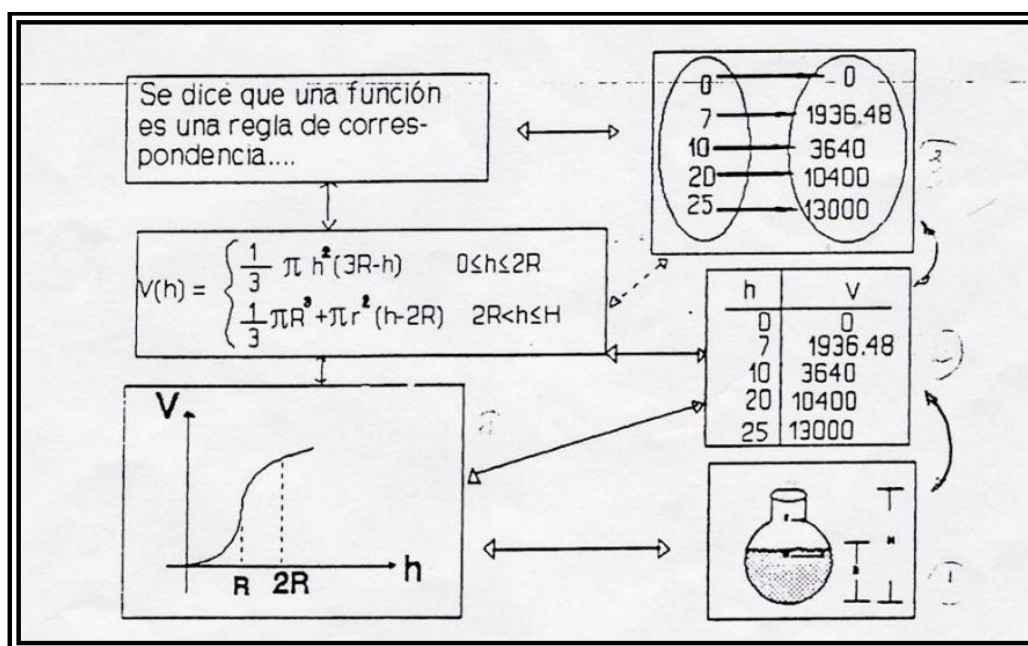


Figura 3 - Sistemas de Mudanças de Representações.

Fonte: Espinosa, 1995, p. 64.

Outro estudo relacionado sobre as dificuldades das mudanças de representações de um conceito matemático foi realizado por Kaput (1987) e chegou-se à conclusão que essas dificuldades estão relacionadas com a ideia de considerar as representações de um mesmo tipo, junto com as operações que se

podem realizar por regras pré-estabelecidas, como em um sistema, conforme mostra a Figura.

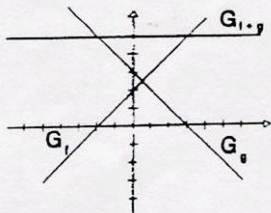
Sistema algébrico	Sistema gráfico
Representaciones algebraicas $f(x) = x + 2, x \in \mathbb{R}$ $g(x) = -x + 3, x \in \mathbb{R}$ $f(x) + g(x) = 5, x \in \mathbb{R}$	Representaciones gráficas 

Figura 4 - Representações em sistema algébrico e gráfico.

Fonte: Espinosa, 1995 p. 65.

Neste contexto, Duval (1988) ressalta a importância de realizar estudos das dificuldades de articulações entre diversos sistemas de representações, como por exemplo, a mudança de representação do sistema gráfico para o algébrico.

As outras duas atividades (tratamento e conversão) estão ligadas à possibilidade de transformar outras representações e conservam todo o conteúdo da representação inicial, ou seja, parte desse conteúdo. Entretanto, se essa transformação se faz no interior do mesmo registro o autor chama de **tratamento**, enquanto que uma transformação produzida em outro registro diferente da representação inicial Duval (2009) define como **conversão**. Essas três atividades cognitivas são fundamentais da *semiós*.

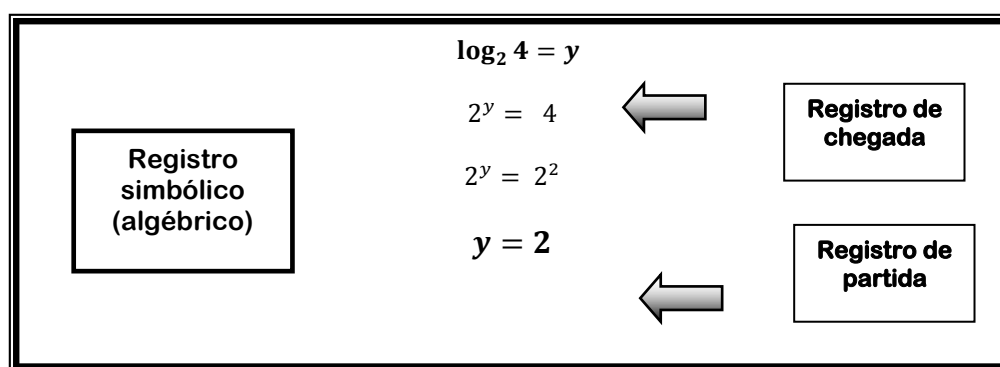


Figura 5 - Atividade Cognitiva de Tratamento.

Fonte: elaborada pela autora.

Se pensarmos no registro de partida em $y = 2$ para um registro de chegada em $\log_2 4$ é um pensamento totalmente diferente, como se estivéssemos

pensando de “traz para frente”. Esse pensar de “traz para frente” é o pensamento reverso, nome dado por Piaget⁴ (1973 apud BROLEZZI; BARUFI, 2007)

“Um tratamento é uma transformação interna a um registro de representação ou a um sistema” (DUVAL, 2009, p. 57). As regras utilizadas para modificar uma representação no registro de partida são regras, que uma vez aplicadas, resultam em um mesmo registro no registro de chegada.

A **conversão** é a transformação do registro de partida da representação de um objeto para uma diferente representação desse mesmo objeto no registro de chegada.

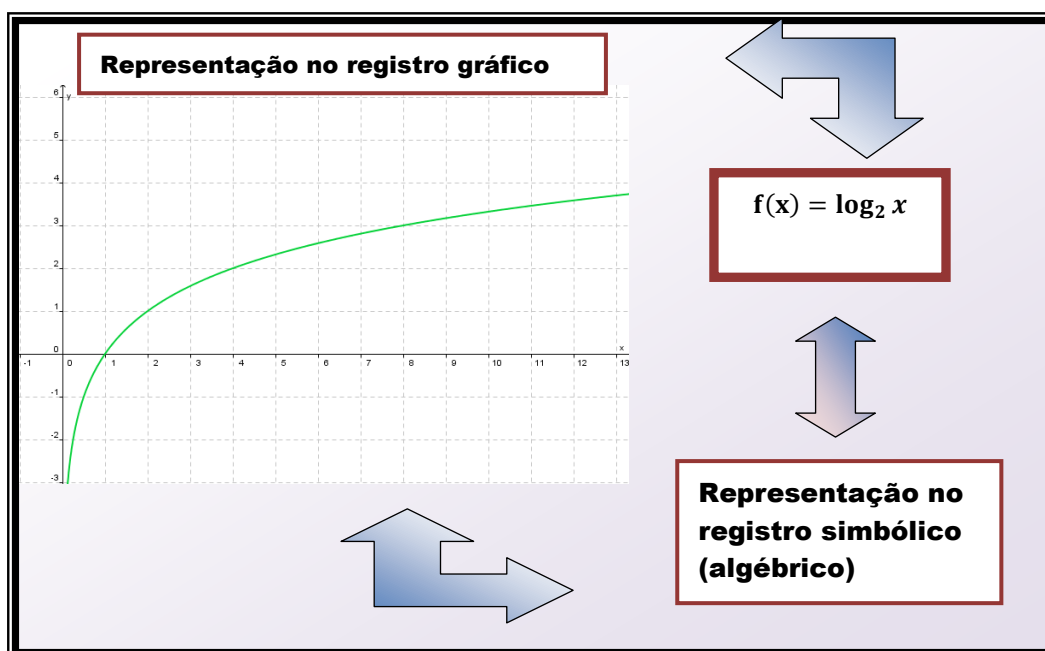


Figura 6 - Atividade Cognitiva de Conversão.

Fonte: elaborada pela autora.

A conversão requer a percepção da diferença entre o sentido e a referência dos signos, ou entre o conteúdo de uma representação e o conceito do que está sendo representado. Sem essa percepção, a atividade de conversão pode vir a ser incompreensível.

⁴ PIAGET, J. Seis estudos de psicologia. Rio de Janeiro: FORENSE, 1973.

Podemos relacionar a ideia de conversão e de tratamento com o pensamento reverso que está envolvido nos processos em que se parte de uma situação A para chegar à outra B e depois parte da situação B para voltar à situação A (BROLEZZI; BARUFI, 2007, p.17).

Os autores ressaltam que para Piaget:

A lógica na criança apresenta-se essencialmente sob a forma de estruturas operatórias, ou seja, o ato lógico consiste essencialmente em operar e, portanto, em agir sobre as coisas ou sobre os outros. Mas ainda, uma operação é, com efeito, uma ação efetiva ou interiorizada, tornada reversível e coordenada a outras operações, numa estrutura de conjunto que comporta leis de totalidade (1973 apud BROLEZZI; BARUFI, 2007, p. 17).

A reversibilidade é destacada por Piaget como o principal critério do pensamento operatório, pois possibilita a execução de determinada ação em sentido contrário ao da ação original.

Nesse sentido, na construção do conhecimento matemático, desde a fase das operações concretas, as noções de fazer e desfazer caminham juntas: para cada operação matemática, é definida a operação inversa, fazendo adequações e ampliações do universo no qual se trabalha (BROLEZZI; BARUFI, 2007).

Os resultados de pesquisas realizadas por Duval (1988) apontam dificuldades no que concerne à atividade de conversão: grande parte dos alunos do *seconde*⁵ não reconheceu a diferença entre uma reta que passa pela origem, daquela que não passa, e até mesmo da escrita algébrica dessas retas.

Segundo o autor, o ensino privilegia apenas a aprendizagem das regras concernentes ao tratamento, e o lugar reservado à conversão das representações de um registro em outro é mínimo, ou até mesmo nulo. Essa afirmação é baseada em inúmeras observações e investigações feitas pelo autor, e os resultados apontaram que a “conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil para grande maioria dos alunos”

⁵ Equivalente ao 1º Ano do Ensino Médio no Brasil.

(DUVAL, 2009, p.63), e não somente a conversão, mas também a coordenação entre diferentes registros, criando dificuldades para a compreensão de conceitos.

Desta forma, é necessário dar início a uma interpretação global para perceber os diferentes valores possíveis das variáveis visuais no registro gráfico e relacioná-los com os símbolos correspondentes na representação algébrica. (DUVAL, 1988). Ou seja, as regras de conversão são diferentes no segundo sentido, no qual a mudança de registro é efetuada.

O autor defende que atividade fundamental para aprendizagem é a conversão das representações, sendo tão importante quanto às de formação e tratamento, e ao utilizar a conversão pode-se favorecer a coordenação dos registros de representações.

2.1.4. Fenômenos característicos da conversão das representações

A natureza cognitiva, própria da atividade de conversão, aparece em dois tipos de fenômenos, conforme Duval (2003):

- a) As variações de congruências e de não congruências;
- b) A heterogeneidade dos dois sentidos de conversão.

Ao analisar uma representação terminal em que na representação de partida, a conversão está próxima de uma situação de simples codificação comparando com o registro de chegada, existe um fenômeno de congruência.

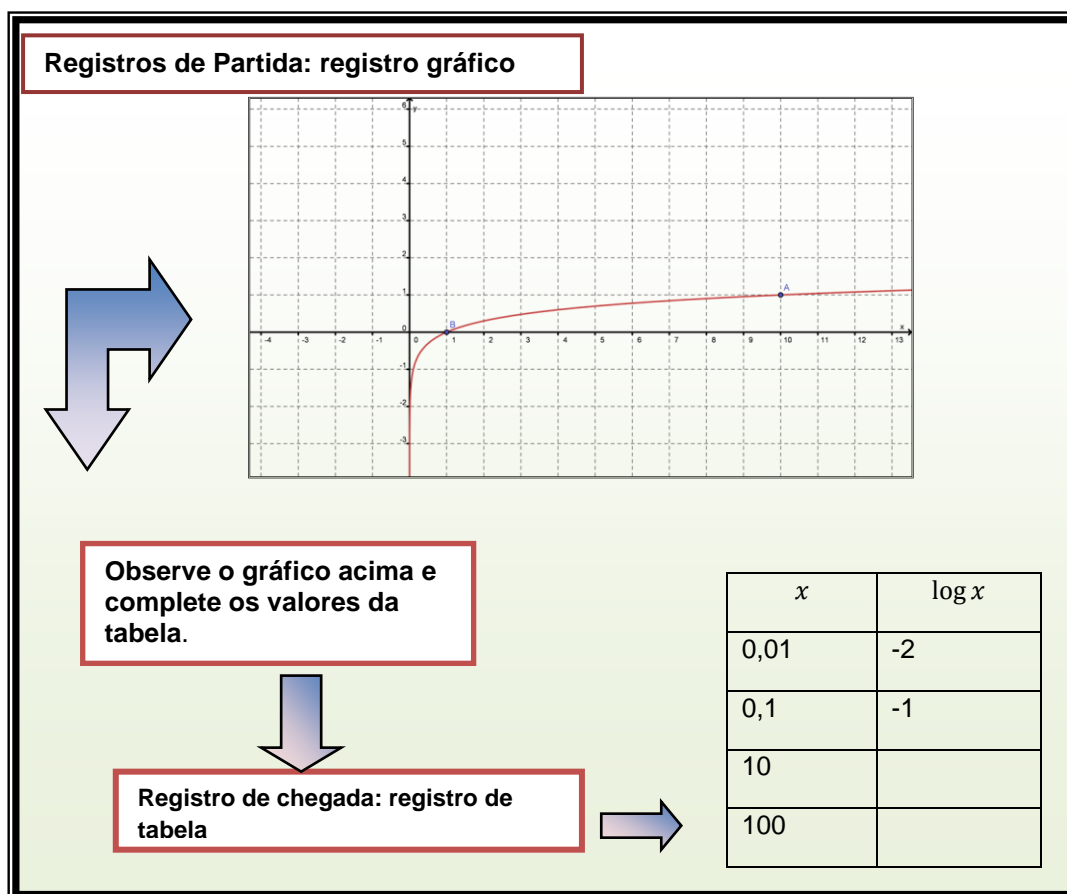


Figura 7 - Atividade de conversão em que pode ocorrer fenômeno congruente.
Fonte: Elaborada pela autora.

Temos um exemplo de uma representação de atividade de conversão na qual pode ocorrer fenômeno congruente, ou seja, no registro de partida temos a representação do registro gráfico da função f definida por $f(x) = \log x$, o registro na língua natural para observar o gráfico da função e no registro de chegada completar a tabela (registro de tabela), ou seja, a situação está próxima de uma codificação de forma que os valores estão explícitos nos pontos A e B e o aluno precisa somente observar esses valores para completar a tabela.

Segundo Brolezzi e Baruffi (2007), no estudo de algumas funções elementares, é solicitado aos alunos esboçar o gráfico de uma função a partir de sua expressão algébrica. É uma situação de conversão entre dois registros de representação: algébrico e gráfico, mas apenas em um único sentido, e ao contrário do que precisaria ocorrer, dificilmente seria solicitado no sentido inverso, ou seja, dado o gráfico de uma função, encontrar sua expressão algébrica. É uma

situação típica de um fenômeno de conversão de não congruência em que se encaixa o pensamento reverso.

Nos fenômenos de conversão em que ocorre a não congruência, “não apenas o tempo de tratamento aumenta, mas a conversão pode se revelar impossível de compreender, se não houver aprendizagem prévia” (DUVAL, 2009, p.66).

Segundo Duval (2003), existem fatores que determinam o caráter congruente ou não congruente de uma conversão, o que conduz a determinar as situações intermediárias.

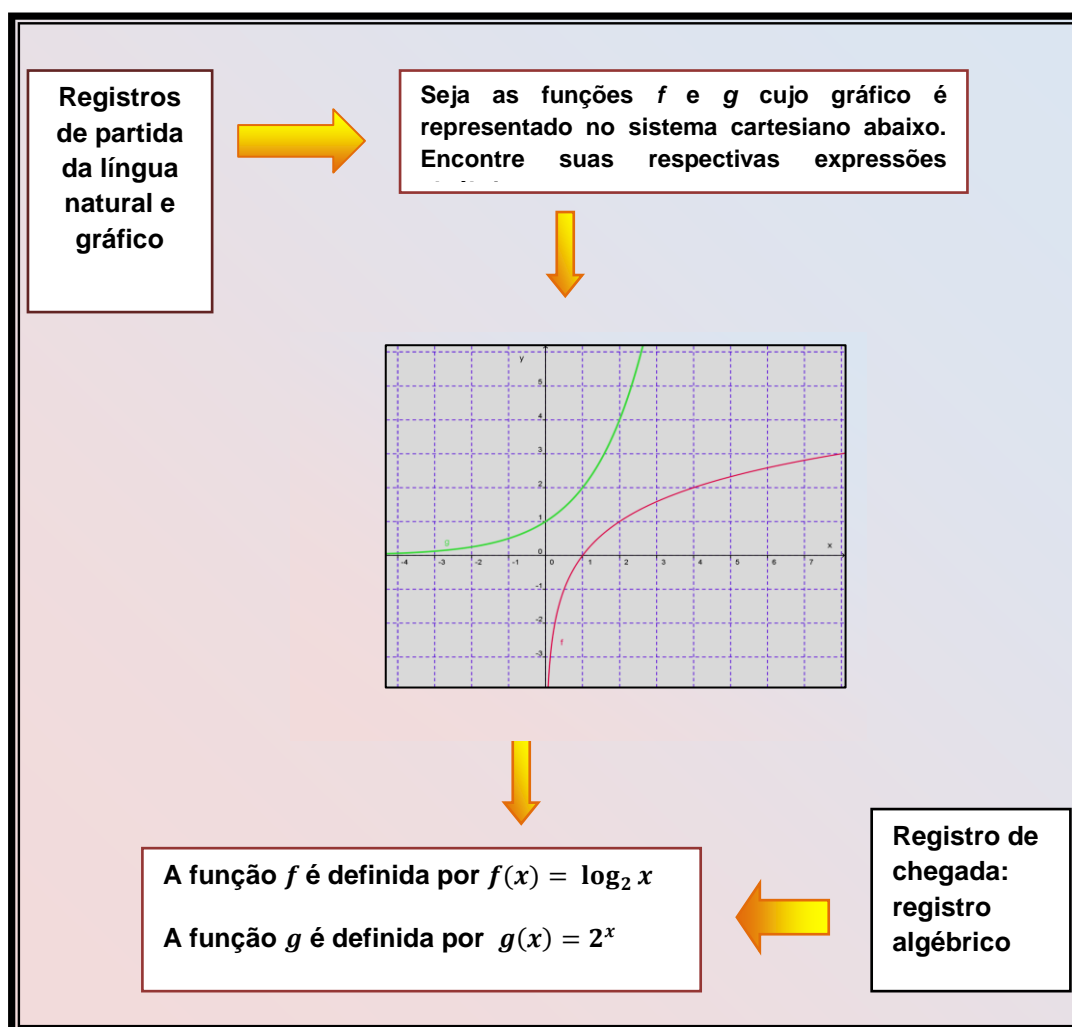


Figura 8 - Atividade de conversão que pode ocorrer fenômeno não congruente.

Fonte: Elaborada pela autora.

Na Figura 8 temos uma situação de conversão de um fenômeno não congruente, pois as regras para encontrar a expressão algébrica no conjunto de chegada a partir do gráfico de uma função não são as mesmas, que se fosse realizado no sentido contrário.

A heterogeneidade do sentido da conversão é o segundo fenômeno que aparece, pois nem sempre a conversão acontece quando se invertem os registros de partida e de chegada. "O que parece conduzir contrastes muito fortes de acerto quando se inverte o sentido de conversão". (DUVAL, 2003, p. 20).

Geralmente, no ensino, um sentido de conversão é privilegiado pela ideia de que o treinamento efetuado num sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido. Os exemplos propostos aos alunos instintivamente escolhidos, evidentemente, nos casos de congruência. Infelizmente esses não são os casos mais frequentes. (DUVAL, 2003, p. 20)

Brolezzi e Barufi (2007) trazem um exemplo de tratamento em um mesmo registro, em que na Escola Básica só é privilegiado um único sentido:

Ao trabalhar com o registro algébrico, os alunos, no decorrer da formação básica, foram de certa forma, treinados a efetuar operações. Dessa maneira, dada uma operação entre dois números ou duas expressões, procurar o resultado é uma tendência em geral automática. Assim, $\frac{2}{x-3} + \frac{5}{x+5} = \frac{7x-5}{x^2+2x-15}$ não causa nenhum espanto e é um fato naturalmente aceito, por meio de manipulações algébricas necessárias, ou seja, realizando tratamento no interior do mesmo registro (BROLEZZI; BARUFI, 2007, p. 27).

Para os autores a leitura da igualdade $\frac{2}{x-3} + \frac{5}{x+5} = \frac{7x-5}{x^2+2x-15}$ da direita para a esquerda causa certo desconforto, pois "pensar ao contrário" não é automático.

Acreditamos que isso de fato é relevante, pois pode causar vários fracassos na aprendizagem dos alunos. Por exemplo, se o professor propuser atividades sobre funções aos alunos de forma que nessas atividades são escolhidos sempre os mesmos subconjuntos dos números reais para compor o domínio da função, poderá induzir o aluno a ter possíveis dificuldades para o traçado de gráficos de funções, como uma função exponencial ou logarítmica, caso este aluno não conheça as características globais dos gráficos dessas funções.

2.2. Os Processos do Pensamento Matemático Avançado

Segundo Dreyfus (1991) para que haja a compreensão em matemática os processos mentais e psicológicos estão intimamente ligados, ou seja, esses aspectos raramente são separados. As imagens mentais e matemáticas estão muito ligadas, e essa ligação entre esses processos é relevante para entender a aprendizagem e o pensamento matemático avançado.

Hoffman propôs uma filosofia da educação matemática com base no simples reconhecimento de que a matemática é uma atividade humana, útil no mundo real, nesta base, ele exige que nós devemos transmitir aos nossos alunos uma visão da matemática como uma ciência que integra a observação, experimentação e a descoberta. (HOFFMAN⁶ 1989 apud DREYFUS, 1991, p. 29 tradução nossa)⁷

O uso do computador como ambiente de aprendizagem, utilizando diferentes representações de um mesmo conceito pode contribuir para o estabelecimento das relações entre as diferentes representações e ao surgimento de ideias para uma formação de conceito que podemos chamar de processos de investigação. Neste processo o indivíduo deve manipular e investigar mentalmente os objetos.

Quando se constrói um gráfico de uma função, neste procedimento está envolvido um processo matemático, seguido de regras que podem ser iniciadas por uma linguagem matemática. Entretanto, quem está executando este processo, está visualizando mentalmente esses gráficos, em outras palavras, há a visualização desta função, e esta pode auxiliar na compreensão deste objeto.

A essência do pensamento matemático avançado está presente nos processos de representar, visualizar, generalizar, assim como outros, como classificar, conjecturar, induzir, analisar, sintetizar, abstrair e formalizar.

⁶ Hoffman, K. M., The science of Patterns: A Practical Philosophy of Mathematics Education, Lecture to SIG/RME, AERA Annual Meeting, San Francisco, CA.

⁷ Hoffman has proposed a philosophy of mathematics education based on the simple recognition that mathematics is a human activity, useful in the real world, on this basis he requires that we should transmit to our students a picture of mathematics as a science which incorporates observation, experiment and discovery.

Podemos relacionar a visualização um dos processos do pensamento matemático avançado segundo Dreyfus (1991) com a concepção deste processo segundo Espinosa (1995), que não somente espera-se que o indivíduo crie uma imagem mental de um conceito, mas também os processos internos (como as transformações mentais) dos conceitos matemáticos adquiridos, e possa exteriorizar essa imagem mental de forma verbal, escrita, etc. A articulação de uma representação a outra tem relação com o processo de associação mental, preservando o significado das diferentes representações de um mesmo conceito.

As representações mentais são de grande relevância na matemática. No caso das funções, os gráficos, tabelas de valores, diagramas de flechas, fórmulas algébricas são as diversas representações deste conceito.

Dreyfus (1991) aponta que para ser bem sucedido na matemática, é desejável ter ricas representações mentais de conceitos nos quais estão contidos muitos aspectos ligados a esse conceito, enquanto que em uma representação pobre se tem poucos elementos para permitir a flexibilidade na resolução de problemas. Essa inflexibilidade é observada nos estudantes, quando aparece uma pequena alteração na estrutura de um problema, ou mesmo em sua formulação, podem bloqueá-los. Imagens mentais pobres do conceito de função são típicas entre universitários iniciantes, que pensam apenas em fórmulas quando se trata de funções, mesmo sendo capazes de recitar um conjunto geral de definições teóricas.

É importante ter muitas representações de um mesmo conceito, porém somente a existência delas por si próprias não é suficiente para permitir a flexibilidade da utilização do conceito na resolução de problemas. É necessário o processo de alternar entre as representações existentes de um mesmo conceito. Entretanto, ensinar e aprender este processo de mudança não é fácil, porque esta estrutura é muito complexa.

Generalizar é derivar ou induzir dados, para identificar aspectos comuns, e expandir os domínios de validade. Um exemplo é observar regularidades em uma sequência numérica, com o objetivo de encontrar uma expressão algébrica que descreva o padrão desta sequência. É partir de um caso particular para um caso

geral. Conforme Dreyfus (1991), isto não é uma tarefa fácil, mas deve ser salientado que a generalização que ocorre com relação a determinados objetos matemáticos; é útil para o estudante porque ele deixa de (esperar) o conhecido em “*terra firme*”, para lidar com a generalidade que adicionou à situação.

A abstração está ligada ao processo de generalizar, porém a natureza do processo mental da abstração é diferente do processo de generalização. Abstrair é um processo da construção de estruturas mentais a partir de estruturas matemáticas, ou seja, de relações entre objetos matemáticos. Requer a capacidade de deslocar a atenção dos próprios objetos para as estruturas de suas propriedades e relacionamentos. Essa atividade mental construída por parte do aluno é fortemente dependente de sua atenção, focalizada sobre essas estruturas, que fazem parte do conceito abstrato.

Dreyfus (1991) elencou quatro fases dos processos entre a representação e abstração no processo de aprendizagem:

- 1 . Usar uma representação única;
- 2 . Usar mais de uma representação em paralelo;
- 3 . Fazer ligações entre as representações paralelas;
- 4 . Integrar representações e flexibilizações entre elas.

Na primeira fase os processos começam a partir de um caso concreto em uma única representação. Na aprendizagem de função, os estudantes normalmente se encontram com várias representações (gráficos, tabelas, diagramas de flecha, expressões algébricas), isso caracteriza a segunda fase, em que as várias representações de um mesmo objeto são utilizadas em paralelo. O difícil processo de transição para o conceito abstrato depende do modo essencial sobre as ligações entre as representações que são formadas. O estabelecimento destas ligações constitui a terceira fase. As fortes ligações permitem aos alunos mudar as representações, o que os torna conscientes do conceito subjacente e, portanto, suscetíveis de influenciar positivamente a abstração. Na quarta etapa o processo de integrações entre as representações é uma síntese do que lhe foi mostrado como parte do processo de abstração: os

vínculos, as relações, as propriedades comuns continuam a constituir o conceito abstrato.

Em outras palavras, o pensamento matemático avançado é composto de uma grande variedade de processos de interação. É importante que o professor de matemática esteja consciente desses processos, a fim de compreender algumas dificuldades que os alunos enfrentam.

2.3. A Engenharia Didática como Metodologia de Pesquisa

Escolhemos os pressupostos da Engenharia Didática de acordo com Artigue, Douady e Moreno (1995) como aporte metodológico para subsidiar nossa pesquisa. A noção de Engenharia Didática surgiu na Didática da Matemática no começo dos anos 80. Este termo foi denominado pelo fato da pesquisa didática ser comparada com o trabalho de um engenheiro que, para realizar um determinado projeto, utiliza-se de métodos científicos; entretanto ao realizar na prática é necessário lidar com fenômenos externos que nem sempre estavam previstos.

A necessidade de desenvolver uma metodologia na Didática da Matemática foi com o intuito de responder questões cruciais das relações entre a investigação e a ação no sistema de ensino e o seu papel nas metodologias de ensino e investigações em sala de aula.

Um dos pontos a ser destacado é que a Engenharia Didática se caracteriza como um experimento empírico fundamentado nas realizações didáticas em sala de aula, e envolve o processo de decidir sobre os resultados por meio das observações e análise das sequências de ensino.

As autoras denominam dois níveis da Engenharia: a microengenharia que tem por objetivo estudar um objeto de estudo de maneira local e a macroengenharia, a investigação didática que permite levar em conta a complexidade dos fenômenos didáticos da sala, tais como a duração das realizações entre o ensino e aprendizagem, considerando a distinção das diferentes formas de construção do conhecimento.

Outra característica importante da Engenharia Didática em comparação com outras metodologias de pesquisa: nestas últimas, os experimentos são validados de forma externa por meio de comparações estatísticas dos resultados dos grupos experimentais e grupos de controle. Na Engenharia Didática esta validação é feita internamente, por meio de registro dos estudos de caso baseados nas confrontações entre as análises *a priori* e *a posteriori*.

2.3.1. As fases da Engenharia Didática

O processo experimental da Engenharia Didática é composto por quatro diferentes fases que descreveremos a seguir:

1) Análises prévias: Nesta fase inicial, o objetivo é encontrar previamente as concepções acerca dos conhecimentos didáticos anteriormente adquiridos no campo de estudo, assim como um determinado número de análises mais frequentes como: a análise epistemológica dos conteúdos abordados do estudo; análise do ensino atual e seus efeitos; as análises das concepções dos estudantes, das dificuldades e obstáculos que contribuem para a evolução dos alunos sobre o objeto de ensino.

2) Análise *a priori*: Esta fase é o momento em que se decide sobre um determinado número de variáveis denominadas como variáveis de comando, que são fixadas as restrições pertinentes ao problema estudado.

São chamadas de variáveis macrodidáticas ou globais aquelas relativas à organização global da Engenharia e as variáveis microdidáticas ou locais, às relativas à organização local da Engenharia, ao organizar uma sequência de ensino.

O objetivo da análise *a priori* é o controle da seleção das expectativas e comportamento dos estudantes baseados em hipóteses no que se refere ao conhecimento prévio dos estudantes em relação ao objeto de estudo, suas dificuldades, escolhas e estratégias de resoluções que poderão ser apresentadas no decorrer da sequência de ensino de acordo com o referencial teórico escolhido.

3) Experimentação: É a fase da realização da Engenharia com os sujeitos escolhidos pelo pesquisador. A experimentação, segundo Machado (2002) supõe:

- ✓ Estabelecer os objetivos e as condições de realização da pesquisa aos sujeitos;
- ✓ O estabelecimento do contrato didático;
- ✓ A aplicação dos instrumentos de pesquisa;
- ✓ O registro das observações feitas durante a experimentação, por meio de observação, transcrição dos registros audiovisuais entre outros;
- ✓ Durante a aplicação devem-se respeitar as escolhas e deliberações feitas nas análises *a priori* a fim de evitar o insucesso da Engenharia.

4) Análise *a posteriori* e validação: Consiste no conjunto de dados recolhidos ao longo da experimentação, as observações realizadas durante a aplicação, as produções dos alunos. Estes dados se completam com outros recolhidos de metodologias externas como questionários, entrevistas individuais no momento da experimentação ou fora dela.

O momento da confrontação das análises *a priori* e *a posteriori*, se fundamenta na essência da validação das hipóteses formuladas na investigação.

Segundo Machado (2002), na confrontação das análises *a priori* e *a posteriori* pode aparecer distorções, mas a validação não é realizada nestas distorções, mas sim nas hipóteses levantadas anteriormente. Com frequência pesquisadores propõem mudanças na engenharia com objetivo de reduzir estas distorções, sem comprometer-se na realidade com o processo de validação.

A seguir, ilustraremos o delineamento de nossa pesquisa segundo os pressupostos da Engenharia Didática.

O Delineamento de nossa pesquisa segundo a Engenharia Didática

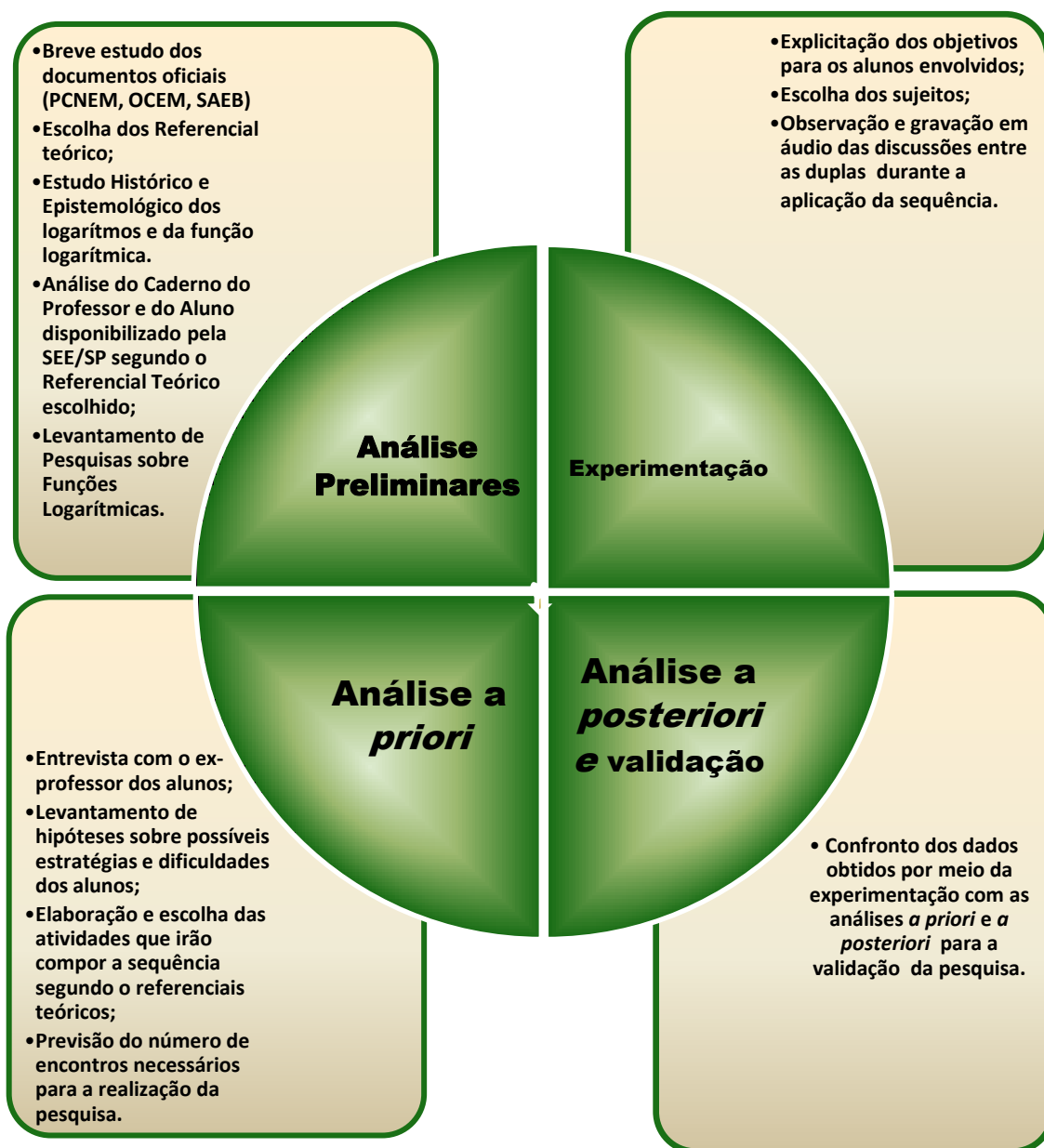


Figura 9 - Esquema das fases da Engenharia Didática empregadas nesta pesquisa.

Fonte: Elaborada pela autora.

Capítulo III

ESTUDOS PRELIMINARES

3.1. Os documentos oficiais e o ensino das funções logarítmicas

O primeiro documento oficial que fizemos a leitura foi os PCNEM⁸ (BRASIL, 1999). A finalidade do Ensino Médio segundo esse documento é que a Matemática não seja apenas de caráter formativo, mas que os estudantes sejam capazes de compreender conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas e aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os em atividades tecnológicas e nas situações cotidianas, além de desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, bem como o espírito crítico e criativo.

Os PCNEM (1999) propõem como critério da seleção de conteúdos a contextualização e citam que cabe ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira autonomia para lidar com os conhecimentos matemáticos. No ensino de funções, o estudante deve compreender o conceito de função em situações diversas para descrever e estudar por meio da leitura de gráficos o comportamento de certos fenômenos e fazer conexões com outras áreas do conhecimento.

Com o propósito de buscar mais subsídios sobre o ensino de função logarítmica, fizemos a leitura dos PCN + Ensino Médio⁹ (BRASIL, 2002). Além de focalizar o ensino da Matemática de uma forma contextualizada, integrada, relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades necessárias para interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, generalizar entre outras ações necessárias para a formação do estudante. Conforme destacam os PCN+ Ensino

⁸ Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 1999).

⁹ PCN+ Ensino Médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias (BRASIL, 2002).

Médio (2002), o ensino da Matemática pode contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e também, à contextualização sociocultural.

A estratégia de resolução de problemas é a peça central, segundo esses documentos, para o desenvolvimento das habilidades citadas acima. Os PCN+ Ensino Médio (Brasil, 2002) aponta que para o desenvolvimento das competências, não é necessário apenas propor exercícios de aplicação e técnicas matemáticas, pois o aluno busca em sua memória apenas exercícios semelhantes ao que foi ensinado pelo professor, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas.

Neste documento é ressaltada a importância não apenas da seleção dos conteúdos, mas também a forma de como tratá-los no ensino. É importante salientar que a escolha de materiais didáticos apropriados, a metodologia de ensino, a forma de como se organizam a sala de aula e o trabalho simultâneo com competências e conteúdos podem contribuir para acontecer a aprendizagem.

Nos PCN+ Ensino Médio os temas foram organizados por três eixos norteadores para possibilitar a articulação dos conteúdos e o desenvolvimento das competências com relevância científica e cultural, desenvolvidos nas três séries do Ensino Médio:

- Álgebra: números e funções;
- Geometria e Medidas;
- Análise de Dados.

O ensino da função logarítmica está situado no primeiro eixo estruturador, em que a unidade temática proposta é a variação de grandezas. Assim o estudo de funções possibilita ao aluno adquirir uma linguagem algébrica necessária para estabelecer a relação de grandeza entre duas variáveis. Desta forma, os PCN+ Ensino Médio (2002) propõem ênfase do estudo dos diferentes tipos de funções focalizando seus conceitos, propriedades, interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções.

O ensino de funções pode ser permeado de situações do cotidiano, formas gráficas que outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas.

A função exponencial e logarítmica, por exemplo, são usadas para descrever a variação de grandezas em que o crescimento da variável independente é muito rápido, sendo aplicada a áreas do conhecimento como matemática financeira, crescimento de populações, intensidade sonora, pH de substâncias e outras (BRASIL, 2002, p. 121).

Também fizemos a leitura sobre as OCEM¹⁰ (BRASIL, 2006) a fim de verificar como o ensino da função logarítmica é proposto. O documento trata de três aspectos: a escolha de conteúdos; a forma de trabalhar os conteúdos; o projeto pedagógico e a organização curricular.

As OCEM (2006) partem do princípio de que toda situação de aprendizagem deve priorizar o “pensar matematicamente”. Desta forma, é necessário priorizar atividades que desenvolvam nos alunos a habilidade do “fazer matemático” por meio de um processo investigativo, dando prioridade à qualidade e não à quantidade dos conteúdos de forma que auxiliem na apropriação do conhecimento.

O documento aponta que no ensino de funções é necessária a exploração das diversas formas de representações de uma função, tais como a representação nos registros algébricos e gráfico, de modo que se explore e se registre qualitativamente crescimento e decrescimento do comportamento da função ao representá-la graficamente.

Também é sugerido aos professores que solicitem aos alunos a expressão com palavras de uma função dada por meio da forma algébrica. Salientar o significado da representação das funções no registro gráfico quando são apresentados seus parâmetros, para identificar os movimentos realizados pelo gráfico de uma função quando se alteram os coeficientes.

É importante que o estudo de função seja apresentado ao aluno por meio dos diferentes modelos tais como linear, quadrático e exponencial por meio de

¹⁰ Orientações Curriculares do Ensino Médio.

situações de aprendizagem que abordem diversas áreas do conhecimento, tais como queda livre, quantidade de medicamento na corrente sanguínea, crescimento de uma colônia de bactérias, etc. Os traçados dos gráficos devem ser entendidos de maneira global da relação de crescimento/decrescimento entre as variáveis e não somente por meio da transcrição de dados tomados de uma tabela numérica, pois segundo as OCEM (2006), esse procedimento não permite avançar na compreensão do comportamento das funções.

No que se refere ao estudo da função logarítmica, é recomendado ao professor que faça uma abordagem sobre a função inversa da função exponencial, e possibilite aos alunos uma discussão das características destes modelos, e que na função exponencial o crescimento apresenta uma taxa de variação que depende do valor da função em cada instante. As OCEM (2006) não recomendam o trabalho exaustivo dos logaritmos e das equações exponenciais; esse trabalho deve ser feito apenas quando associado a algum problema de aplicação em outras áreas do conhecimento, como a Química, Física, Matemática Financeira, etc.

No que diz respeito às avaliações externas fizemos a leitura das Matrizes de Referências do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica que apresentaremos a seguir.

3.2. Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB)

É um sistema Nacional de Avaliação da Educação básica realizado pelo Ministério da Educação. O objetivo da implantação do SAEB é de oferecer subsídios para a formulação, reformulação e monitoramento de políticas públicas, contribuindo para a melhoria da qualidade do ensino brasileiro. Essa avaliação é feita por amostragem em todos os municípios brasileiros. Participam desta avaliação alunos matriculados nas 4ª e 8ª série do Ensino Fundamental e na 3ª série do Ensino Médio.

Em 1997, foram desenvolvidas as Matrizes de Referência com a descrição das competências e habilidades que os alunos deveriam dominar em cada série avaliada, tanto na construção dos testes, como na análise dos resultados.

Em 2001, as Matrizes de Referência foram atualizadas em razão da ampla disseminação pelo MEC, dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Foram consultados cerca de 500 professores de 12 estados da Federação, com o objetivo de comparar as Matrizes existentes e o currículo utilizado pelos sistemas estaduais com os PCNEF¹¹ e PCNEM.

Em 2005, paralelamente à avaliação do SAEB, foi realizada outra avaliação, essa de natureza censitária. A Prova Brasil é denominada Avaliação Nacional do Rendimento Escolar, que utiliza os mesmos procedimentos usados pelo SAEB. É realizada a cada dois anos, avalia as habilidades em Língua Portuguesa (foco na leitura) e em Matemática (foco na resolução de problemas).

As matrizes de Referência de Matemática estão estruturadas por anos e séries avaliadas. Para cada um deles, são definidos os descritores que indicam uma determinada habilidade que deve ter sido desenvolvida nessa fase de ensino. Esses descritores são agrupados por temas que relacionam um conjunto de objetivos educacionais. Os temas estão agrupados em:

- Tema I – Espaço e Forma;
- Tema II – Grandezas e Medidas;
- Tema III – Números e Operações: Álgebra e Funções.

A função logarítmica está localizada no Tema III na qual é indicada pelo descritor D28 (Figura 10) que tem por objetivo identificar a representação no registro algébrico e gráfico de uma função logarítmica, reconhecendo-a como inversa da função exponencial.

¹¹ Parâmetros Curriculares do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998).

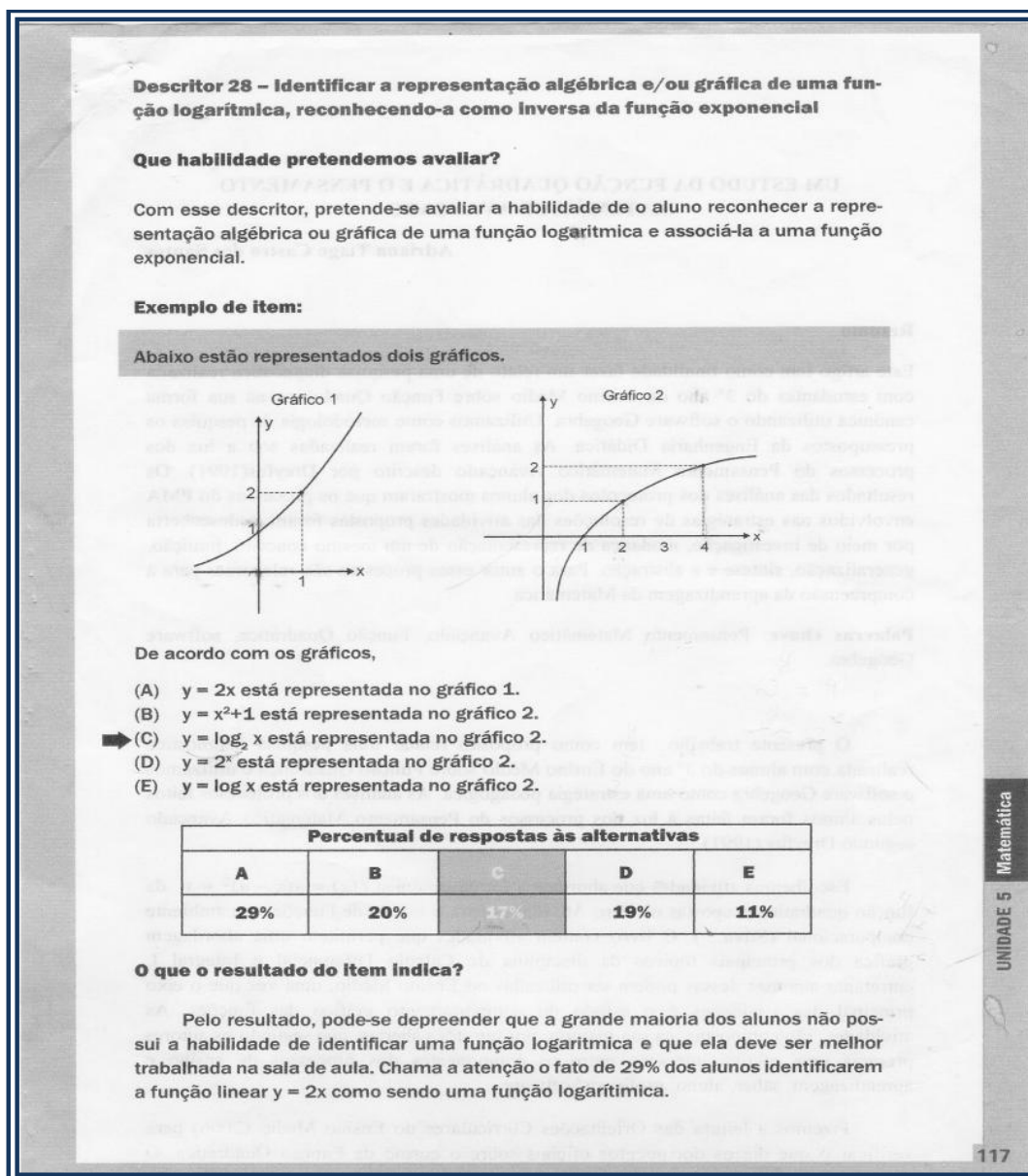


Figura 10 - Exemplo de Questão da Prova do SAEB.
 Fonte: Brasil, 2009.

O documento aponta a importância de o professor trabalhar simultaneamente as funções exponenciais e logarítmicas em um mesmo plano cartesiano, para permitir que o aluno identifique-as como funções inversas. Ressalta o trabalho com situações-problema, relacionados ao crescimento das bactérias, fenômenos radioativos e à escala de Richter que mede a intensidade dos terremotos.

Por meio dos resultados da questão acima, é importante ressaltar que há indícios da ênfase no trabalho com o estudo da função afim no Ensino Médio; os

alunos que participaram desta avaliação em 2005 desconhecem a representação no registro gráfico das funções citadas nas questões e tiveram dificuldades em associar com suas respectivas representações no registro algébrico.

Além das leituras dos documentos oficiais, realizamos uma pesquisa virtual em banco de Teses da CAPES, sistema de bibliotecas integradas da USP, UNESP e UNICAMP, utilizando como palavras-chave Logaritmos, Ensino da função logarítmica no Ensino Médio, com o propósito de encontrar pesquisas produzidas no Brasil sobre o ensino das funções logarítmicas, no entanto encontramos poucos trabalhos como relataremos a seguir.

3.3. Pesquisas referentes ao ensino e aprendizagem de Funções Logarítmicas

A primeira pesquisa relacionada ao tema de logaritmos que encontramos no banco de teses da Capes foi uma dissertação de Mestrado Acadêmico da pesquisadora Karrer (1999) pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Em sua pesquisa, a autora propôs uma sequência didática utilizando a calculadora científica com o objetivo de auxiliar no desenvolvimento da construção do conceito de logaritmos pelos alunos envolvidos. Para tanto, a autora utilizou como referenciais os pesquisadores da Psicologia Cognitiva: Piaget, Vygotsky e Vergnaud e ideias advindas da Didática da Matemática Francesa: a noção de obstáculo de Brousseau e o jogo de quadros de Douady, a fim de guiar o estudo sem perder de vista a contribuição desses pesquisadores para o entendimento da aquisição de conceitos.

A autora realizou um estudo histórico e epistemológico do surgimento do conceito de logaritmos e ressaltou a importância de que ao utilizar a história da Matemática pode enriquecer as aulas e fornecer a todos uma visão das dificuldades encontradas na época para a construção de um conceito, possibilitando salientar a importância de que um tema matemático não surgiu do nada, sem nenhum objetivo, mas que a matemática foi desenvolvida a partir de problemas e das necessidades que foram surgindo com o passar do tempo.

Inicialmente, os logaritmos foram utilizados como instrumento para facilitar e simplificar o cálculo aritmético, transformar produtos em somas, permitindo assim a rapidez em resolver situações-problema da época. Contudo, nos dias atuais esse conceito passou por uma série de evoluções e ampliações ao longo do tempo. Para a autora, a introdução deste conteúdo é de vital importância, pois pode explorar situações-problema que envolvam este conceito, com o objetivo de que o aluno perceba a relevância de estudar logaritmos nos dias de hoje.

Para o desenvolvimento da sequência foi realizado um estudo por dois grupos: *experimental*, que teria o primeiro contato com o tema por meio da sequência elaborada pela autora, e o *grupo de referência*, no qual os alunos estudaram o tema sugerido por livros didáticos. Participaram deste grupo 29 alunos da primeira série do Ensino Médio de outra instituição privada.

No grupo *experimental* participaram inicialmente com 8 duplas totalizando 16 sujeitos de uma instituição privada do Estado de São Paulo, porém as análises foram feitas apenas com os sujeitos que participaram das três etapas (pré-teste, sequência e pós-teste) e foram computados 13 alunos. Esses estudantes eram da primeira série do ensino médio, que nunca tiveram contato com o conteúdo Logaritmo.

O grupo de *referência* foi composto por uma turma de primeira série de nível médio de outra instituição privada, sendo que estes já realizaram o estudo de logaritmo por meio de uma abordagem tradicional apresentada nos livros didáticos. Foram computados 29 alunos para a análise dos resultados.

O experimento foi realizado em três fases, na fase 1 foram apresentadas questões de função exponencial e logaritmo, com o objetivo de fazer uma sondagem dos conhecimentos prévios dos alunos. Estes alunos já haviam terminado o estudo da função exponencial, porém ainda não tinham estudado logaritmo. A fase 2 foi dedicada à introdução de questões que pudessem ajudar no processo de ensino e aprendizagem do conceito de logaritmo e a sequência didática foi aplicada a um dos grupos. Por fim na fase 3 os dois grupos foram novamente submetidos a um segundo teste nos moldes do primeiro.

Para a análise dos resultados a pesquisadora descreveu nove categorias de erros mais presentes nos protocolos dos alunos, com o objetivo de identificar os principais raciocínios e procedimentos que conduziram os alunos ao insucesso e evidenciar os possíveis obstáculos didáticos e epistemológicos. Essas categorias foram denominadas por:

E₁: Dificuldade nas manipulações algébricas;

E₂: Problemas na concepção de potências;

E₃: Problemas na concepção de função exponencial;

E₄: Tendência ao pensamento linear em situações não lineares;

E₅: Dificuldades de se expressar na forma escrita;

E₆: Problemas de interpretação;

E₇: Erro proveniente do não estabelecimento do logaritmo como ferramenta de resolução de equações exponenciais;

E₈: Problemas na técnica de cálculo do logaritmo;

E₉: Desconhecimento ou uso inadequado de ferramentas (tabelas ou calculadoras) para o cálculo de logaritmo.

No pré-teste a maioria das questões estava sem resolução e das questões resolvidas, os erros frequentes foram as categorias E₁, E₃, E₄ e E₆. Enquanto que no pós-teste houve um bom índice de acertos com resoluções justificadas. Os erros mais frequentes foram: “dificuldades em se expressar na forma escrita”, “erro decorrente de problemas na concepção de potência” e “erro decorrente de problemas de interpretação”. São erros secundários, não específicos do conteúdo de logaritmo, mas que dificultaram as resoluções das atividades. Segundo Karrer (1999), as potências, a exponencial e o logaritmo pertencem ao mesmo campo conceitual, logo as dificuldades nos dois primeiros conceitos acarretarão dificuldades na construção do conceito de logaritmos.

Em suas considerações, a autora afirma a relevância de ter acrescentado mais situações-problema para alcançar melhores resultados, pois possibilitaria

condições de desenvolver habilidades de interpretação e de modelização matemática em sua pesquisa. A autora sugere para futuras pesquisas que se inicie o trabalho com uma revisão de potência e enfatize-se a linguagem matemática para explorar mais a simbologia na definição matemática de logaritmo.

Após a leitura da dissertação de Karrer (1999) foi possível constatar as dificuldades que os estudantes se deparam quando lhe é apresentado o objeto Logaritmo. A construção da sequência elaborada pela autora e os resultados apresentados serviram de base para continuarmos a pesquisar sobre o tema.

O segundo trabalho que encontramos foi também uma dissertação de Mestrado, de Chaves (2005), intitulada *“Modelando Matematicamente questões ambientais relacionadas com a água, a propósito do ensino-aprendizagem de funções na 1ª série do Ensino Médio”*.

Chaves (2005) propôs situações-problema para que os alunos explorassem as funções polinomiais de 1º e 2º grau, exponenciais e logarítmicas.

Antes de aplicar as atividades da pesquisa, a autora realizou uma revisão dos conteúdos relativos a números reais, noção de par ordenado e plano cartesiano, equações e as primeiras noções de função, seus elementos e suas representações.

Para esta revisão, a autora elaborou fichas que continham tabelas, diagramas, situações-problema para traduzir para a linguagem matemática, e os alunos foram questionados quando a palavra função tinha o significado de dependência. As situações-problema envolviam as relações entre duas variáveis a partir de figuras geométricas, razão, proporção, regra de três simples e composta.

Após a realização desta atividade a autora concluiu que os alunos desconheciam esses conteúdos que são ensinados no Ensino Fundamental. Outros conteúdos foram revisados como: operações com números irracionais, racionais, potências de base dez, equações de 1º e 2º grau.

A Modelagem Matemática é uma estratégia de ensino realizada a partir da problematização de situações e dados reais. Nesta perspectiva, o objetivo da autora foi propor atividades que contemplassem situações-problema e os alunos apresentassem modelos matemáticos para responder a esses problemas.

Para elaborar essas atividades a autora buscou dados reais e a partir desses dados elaborou 14 questões sobre o tema Água. As atividades contemplaram situações-problema que focalizavam o conceito de funções polinomiais, exponencial e uma atividade que necessitou do uso de logaritmos.

A pesquisa foi realizada na cidade de Belém com alunos do 1º ano do Ensino Médio, com três encontros semanais durante 3 meses. Para análise das atividades a autora criou categoria de análise segundo a teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel.

Os resultados da pesquisa apontaram que o ensino por Modelagem pode levar o aluno a tornar-se participante do seu processo de aquisição de conhecimento e assim facilitar a sua aprendizagem significativa.

Em suas considerações finais, a autora relata que os alunos aprenderam a utilizar de forma significativa os modelos definidos por funções, como ferramenta para resolver problemas com referência na realidade, e que a modelagem matemática contribuiu para essa aprendizagem.

A leitura deste trabalho foi importante, pois verificamos algumas aplicações de modelos exponenciais e logaritmos para a resolução de problemas a partir de dados reais.

O terceiro trabalho encontrado foi a dissertação de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática da UNIFRA (Centro Universidade Franciscano) no Rio Grande do Sul intitulado “*Uma Sequência de Ensino para o estudo de logaritmos usando a Engenharia Didática*” realizado por Ferreira (2006).

O objetivo do trabalho foi elaborar e aplicar uma sequência didática seguindo as fases da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa abordando situações de aprendizagem envolvendo o tema logaritmos para

realizar uma investigação sobre as dificuldades do ensino e aprendizagem desse conceito.

Essa pesquisa foi fundamentada pela Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986) por se tratar de uma teoria que permite analisar os fenômenos que ocorrem em sala de aula, considerando as particularidades do saber matemático e as diferentes formas de apresentação do conteúdo matemático ao aluno. Essa teoria abrange professor, alunos e o saber matemático e pode ser um auxílio para tornar o ensino da matemática um ambiente contextualizado podendo garantir sucesso na aprendizagem.

Neste contexto a situação didática elaborada pela pesquisadora foi construída a partir de situações-problema para que os alunos pudessem compreender a importância do estudo dos logaritmos e a sua aplicação em modelos que descrevem fenômenos, crescimento populacional, epidemias, etc.

Em uma situação didática é importante distinguir o que realmente determina o crescimento dos alunos com relação aos seus conhecimentos, não importando os resultados, tais como êxitos ou fracassos, o que importa é identificar os fatores determinantes desses resultados para a aprendizagem de um determinado conceito.

Assim como Karrer (1999), a autora também salienta a necessidade em utilizar o contexto histórico para o ensino de Logaritmo e ressalta a importância de observar as transformações sofridas pelos logaritmos ao longo desse último século no contexto sociocultural.

Com o desenvolvimento das tecnologias, surgimento da calculadora, computadores, desenvolvimento de *softwares* matemáticos, o uso do Logaritmo deixou de ser utilizado apenas como uma ferramenta de simplificação para facilitar o cálculo aritmético, mas também na modelagem de fenômenos descritos pela natureza, crescimento populacional, entre outros.

Do ponto de vista do ensino e das transformações sofridas por um saber, Ferreira (2006) menciona três tipos de saberes segundo a concepção da teoria da Transposição Didática: o saber científico que está relacionado às pesquisas acadêmicas; o saber a ensinar e o saber ensinado. Para que os alunos tenham

acesso ao saber científico é necessário que esse saber seja reformulado com uma linguagem mais acessível. Desta forma, o saber a ensinar está relacionado à forma como o saber científico é apresentado ao aluno. A partir desses dois saberes surge o saber ensinado. É realizado pelo professor por meio de uma abordagem metodológica de ensino direcionada à aprendizagem de determinado conteúdo. A autora ressalta que a relação entre esses saberes podem ser gerados a partir do conhecimento dos alunos.

A elaboração da sequência didática foi direcionada por meio das hipóteses da pesquisadora de abordar a História da Matemática para propiciar a construção e a compreensão do conceito de logaritmos; a utilização de situações-problema para possibilitar o desenvolvimento da criatividade dos alunos; a construção de uma escala de logaritmos para consolidar este conceito e o uso do *software* Winplot para favorecer um estudo da função logarítmica de uma forma mais ampla do que ao utilizar apenas lápis e papel.

A metodologia utilizada na pesquisa foi a Engenharia Didática. Para as análises preliminares a autora analisou a proposta pedagógica da escola, os PCNEM e analisou como o ensino de logaritmo é abordado em cinco livros didáticos. Para essa análise foram considerados como critérios: os aspectos históricos, introdução do conteúdo e a linguagem abordada pelos autores dos livros.

A pesquisa foi realizada em um Colégio Militar no município de Santa Maria no Rio Grande do Sul. Foi feito um teste diagnóstico com 27 alunos da 1ª série do Ensino Médio a fim de verificar as concepções que tinham a respeito do tema função exponencial, o que possibilitou identificar as concepções errôneas, para que pudessem ser devidamente trabalhadas na sequência didática. O teste foi composto de 7 questões objetivas com 4 alternativas, que contemplavam os conteúdos: equações exponenciais, potenciação, situação-problema envolvendo o uso da equação exponencial para encontrar a solução do problema, questões apresentadas no registro gráfico para que os alunos encontrassem o domínio da função exponencial e o comportamento da curva desta função neste registro. As dificuldades encontradas foram:

- Aproximadamente 50% dos sujeitos confundiram o domínio com o conjunto imagem da função.
- Confundiram a parábola representada pela função quadrática como sendo uma função exponencial.
- A questão apresentada aos alunos foi representada por meio do registro algébrico definida pela função f dada por $f(x) = 2^x$ e sua respectiva representação gráfica e 48,1% dos alunos se referiram à resposta que continha a função g definida por $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Esse fato fez a pesquisadora concluir que os alunos desconheciam o conceito de função inversa.
- Os alunos tiveram dificuldades em justificar suas observações e suas conclusões no registro em língua natural.

Após as dificuldades encontradas no teste diagnóstico, foram feitas as escolhas do que Artigue, Douady e Moreno (1995) denominam variáveis de comando; isto é, a pertinência ao problema estudado:

- ✓ Retomada do estudo da função exponencial, construção do modelo matemático que descreve cada situação.
- ✓ Estabelecer a relação do gráfico da função exponencial e de sua inversa, a função logarítmica, bem como a relação entre as definições dessas duas funções.
- ✓ Relacionar as propriedades da função exponencial e da função logarítmica e utilizar essas propriedades na resolução de problemas.
- ✓ Construção de uma escala logarítmica para compreender o significado das medidas expressas pela escala Richter, utilizada para medir a intensidade de terremotos.
- ✓ Utilizar o *software* Winplot para a construção dos gráficos dos modelos matemáticos obtidos, e verificar graficamente as propriedades da função logarítmica e comparar com uma função exponencial.

A aplicação foi feita durante cinco semanas totalizando sete sessões para a realização da aplicação da sequência didática. Durante a aplicação a professora interferiu somente quando requisitada pelos alunos, pois o professor deve ser considerado, essencialmente, do ponto de vista das suas relações.

Segundo a Teoria das Situações Didática a autora explica que a devolução é uma condição fundamental, significando a aceitação do aluno pela responsabilidade na busca da solução do problema proposto, assim como pelo entendimento que o professor elaborou uma situação possível de ser resolvida, conforme os conhecimentos prévios que ele possui. Assim, feita a devolução, a situação proposta se converte no problema do aluno. Já a institucionalização é o momento em que o professor retoma as questões discutidas e estabelece seus principais resultados, levando em conta os questionamentos e considerações feitas pelos alunos, o que ocorreu no final de cada Sessão.

A pesquisadora ressalta que a escolha da Engenharia Didática como metodologia facilitou o direcionamento de sua pesquisa. A aplicação e análise dos resultados do teste diagnóstico foram fatores relevantes para elaborar a sequência didática e conduzir a realização da sua investigação. Uma das dificuldades apresentadas pelos alunos foi na construção da escala logarítmica.

A autora defende a ideia de que as situações-problema não devem ser deixadas para o final desse conteúdo, pois essas podem despertar maior interesse nos alunos em resolvê-las. Uma das preocupações da sequência didática foi sanar as dúvidas da construção do gráfico da função exponencial de sua função inversa, a logarítmica por meio do *software* Winplot.

Em suas considerações finais a autora deixa claro que seus objetivos foram alcançados de forma satisfatória.

A contribuição da leitura deste trabalho foi importante para refletirmos sobre como a Engenharia Didática enquanto metodologia pode contribuir para o direcionamento de uma pesquisa, principalmente no momento de sua validação, em que há a confrontação das análises *a priori* e *a posteriori*. Uma reflexão importante de ser ressaltada é que os sucessos e insucessos dos alunos

apontados na pesquisa de Karrer (1999) foram semelhantes aos que Ferreira (2006) observou durante o desenvolvimento de sua pesquisa.

O quarto trabalho que encontramos foi a dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo intitulada “*Análise de uma intervenção didática sobre desigualdades e inequações logarítmicas no Ensino Médio*” desenvolvida pela pesquisadora Saldanha (2007).

O objetivo do trabalho foi fazer análise e reflexão da mudança da prática docente da professora-pesquisadora frente aos seus alunos, visando à análise do processo de ensino e aprendizagem envolvendo o professor, aluno e o saber matemático na resolução de situações-problema com inequações logarítmicas. A autora justifica a escolha e o interesse por dois motivos: o primeiro é o fato de que seus alunos têm dificuldades em compreender conceitos como inequações, em especial as inequações logarítmicas e ao fazer uma revisão da literatura, a pesquisadora encontrou poucos trabalhos que tratassem sobre o tema em questão.

A pesquisa foi realizada em uma instituição privada que adotara na ocasião o Sistema de Apostila do Anglo. Os participantes da investigação foram alunos da pesquisadora na 6ª série do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio e no momento da pesquisa estavam no 2º ano do Ensino Médio. Ela havia ensinado a esses alunos temas como função exponencial e logarítmica no ano anterior.

O ensino desses conteúdos foi identificado pela professora-pesquisadora de Tendência Tecnicista Mecanicista, que segundo Fiorentini (1995) procura reduzir a Matemática a um conjunto de técnicas, regras e algoritmos, sem grande preocupação em fundamentá-los ou justificá-los. Segundo a autora, estudos mostram que esta prática adquirida, pouco tem contribuído na aprendizagem dos alunos.

Para a reflexão da mudança do papel do professor em relação à sua prática pedagógica a autora cita Fiorentini (1995) e durante a aplicação das atividades a mesma fundamenta-se nas ideias de Ponte (2005) sobre as investigações na sala de aula. Para a organização e análise das situações

didáticas, o trabalho foi norteado segundo a noção dialética-ferramenta-objeto, descrita por Douady (1984) que foi aplicada pela professora-pesquisadora durante oito aulas de 45 minutos, as discussões e institucionalização da resolução dos problemas foram feitas no final das aulas.

Para a organização do trabalho a professora-pesquisadora organizou grupos e elegeu um redator que teve a missão de apresentar as resoluções feitas por seu grupo na lousa, logo após a entrega da folha de resposta. Para Ponte (2005) esse é um momento crucial para os alunos partilharem suas ideias, confrontos, conjecturas e justificativas, cabendo ao professor o papel de moderador.

Para a coleta e análise de dados a pesquisadora gravou em fita-cassete alguns diálogos realizados pelos alunos e a discussão geral feita após cada atividade. Foram analisados os registros feitos por ela e as produções escritas dos alunos para a análise do estudo, confrontando-se o quadro teórico da pesquisa com as situações didáticas realizadas.

No momento em que houve a necessidade para a seleção dos problemas utilizados pela professora-pesquisadora, a mesma sentiu a necessidade de fazer uma revisão da função exponencial e logarítmica para dar subsídios aos alunos. Douady (1984) considera como a existência de um conhecimento prévio (antigo) e esses conhecimentos pode funcionar como ferramentas para a relação como um novo conhecimento e assim favorecer a construção desse novo saber, no caso as inequações logarítmicas.

Em suas considerações a autora cita que a realização da pesquisa proporcionou aos alunos um modo diferente de aprender Matemática por meio da investigação e puderam perceber que o trabalho em grupo proporcionou um ambiente colaborativo, desafiante e estimulador. Ficou claro que a resolução de problema utilizando a investigação como estratégia de ensino proporcionou aos participantes o desenvolvimento de uma melhor compreensão da Matemática.

As reflexões suscitadas durante a realização da investigação realizada pela professora-pesquisadora mostraram mudanças na prática docente em que o aluno passou a ver a professora como uma companheira de aprendizagem e não como um agente transmissor do saber. A autora salienta a importância de ouvir o aluno para compreender seu modo de pensar e desenvolver melhores estratégias na intervenção com eles.

Achamos importante a leitura da dissertação de Saldanha (2007), pois a autora enfocou a sua análise na reflexão de sua própria prática como professora. Ela relata que houve mudança crucial para a pesquisadora no que diz respeito ao papel do professor em sala de aula, deixando de ser um transmissor do conhecimento para ajudar os alunos a construírem o seu próprio conhecimento quebrando o contrato didático entre ela e seus alunos.

O quinto trabalho encontrado sobre o ensino de logaritmos foi uma dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo de Lima (2009) intitulada “*Uma trajetória hipotética de aprendizagem sobre funções logarítmicas*”.

O autor justifica que o tema é tratado no Ensino Médio apenas de modo geral, enfatizando as definições, fórmulas, propriedades, roteiros de construção de gráficos e exercícios descontextualizados. Segundo os professores que colaboraram na elaboração e aplicação da Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA), esse tema é deixado de lado quando termina o ano letivo, e muitos alunos terminam o Ensino Médio sem ter trabalhado com a função logarítmica.

O objetivo do trabalho foi de elaborar uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem denominada por THA que envolva situações contextualizadas, interdisciplinares utilizando como estratégia de ensino a resolução de problemas para que o aluno possa aplicar seu conhecimento em situações do cotidiano, em outras áreas do conhecimento bem como na própria Matemática. O autor também fez uso das tecnologias em recursos como o *software* Winplot e a calculadora científica para contribuir com a aprendizagem dos alunos. O uso desses instrumentos pode servir como laboratório para os estudantes, para realizar experiências, desenvolver ideias, levantar hipóteses sobre o tema e usar suas próprias estratégias matemáticas.

As questões de pesquisa que o autor buscou responder foram:

- ✓ Como compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com o planejamento de ensino, no caso particular das funções logarítmicas?
- ✓ Como podem ser propostas e desenvolvidas em sala de aula situações didáticas de aprendizagem, que explorem contextos do cotidiano de outras áreas do conhecimento e da própria Matemática?

- ✓ Que atuação pode ter um professor de Matemática ao abordar o tema funções logarítmica, quando se pretende que os alunos sejam protagonistas na construção de suas aprendizagens?

O referencial teórico utilizado para a realização da pesquisa foram as formulações de Simon (1995) que abordam os aspectos da corrente construtivista de aprendizagem, para apresentar as Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem (THA). Os objetivos da aprendizagem, as atividades de aprendizagem, pensamento e conhecimento são pontos importantes para a construção de uma trajetória hipotética de aprendizagem. O professor de Matemática deve ter hipóteses sobre o conhecimento dos alunos, além de conhecer outros saberes profissionais como teorias sobre o ensino da Matemática, materiais pedagógicos, teorias de como se constroem o conhecimento a respeito de um conceito que podem intervir no sucesso dessas trajetórias, a qual ele denomina como parte chave do Ciclo de Ensino de Matemática. (LIMA 2009)

Antes de iniciar a construção da THA o autor fez análise dos livros didáticos indicados pelos professores participantes da pesquisa: *Matemática no Ensino Médio*, de Smole e Diniz (2005) e *Matemática fundamental*, de Giovanni; Bonjorno; Giovanni Jr. (1994) e do Caderno do Professor do 1º ano do Ensino Médio adotado pela Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo no ano de 2008 e que também serve de apoio ao trabalho dos professores para verificar como o tema é tratado nestes documentos.

Após a análise dos materiais didáticos, o autor ampliou a reflexão para a construção de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem com diferentes situações-problema visando favorecer a apreensão do conceito de funções logarítmicas pelos alunos.

Para tanto foram escolhidas atividades que abordam situações reais que utilizam o crescimento logarítmico, proporcionando discussões entre os alunos de forma que relacionem o tema com situações cotidianas. Foi utilizado o *software* Winplot para a plotagem de gráfico das funções, para assim o aluno visualizar a curva que representa respectivamente a função exponencial e a função logarítmica, a fim de compará-las e conhecer suas características.

As dificuldades mais frequentes apontadas pelo autor foram: a falta dos alunos em experimentar, levantar hipóteses, errar e aprender com o erro, fato

levado como hipótese pelo autor, que durante as aulas não há espaço para os alunos discutirem sobre o tema proposto pelo professor. Esse tema de maneira geral é transmitido pelo professor sem a necessidade de os alunos fazerem suas próprias conclusões, impossibilitando a construção do conhecimento segundo a perspectiva construtivista.

Outro problema preocupante mencionado pelo autor é a falta de interpretação de situações-problema. Autores como Karrer (1999), Ferreira (2006) já apontaram essas dificuldades durante o processo de suas pesquisas e em seus levantamentos bibliográficos. O autor tem como hipótese que situações-problema não são enfatizadas durante as aulas de Matemática.

Ao fazer uma avaliação após a aplicação da THA, os alunos não relacionaram o estabelecimento dos logaritmos como ferramenta para a resolução de problemas. As propriedades dos logaritmos, os erros ao utilizar as propriedades das potências, assim como a situação-problema que envolveu o domínio das funções logarítmicas, foram dificuldades encontradas pelos alunos.

Entendemos que partir de funções exponenciais para chegar às funções logarítmicas seja um bom caminho a percorrer, contudo indicamos como fortes dificuldades as regras de potenciação, resolução de equações exponenciais, resolução de equações de 1º e 2º graus, construção e interpretação de gráficos (plano cartesiano), tópicos básicos de funções (domínio, imagem, função inversa, entre outros). Esses temas foram trabalhados, segundo os professores, assim nossa hipótese é de que o foram superficialmente, ou seja, os estudos não foram suficientes para aquisição de novos conhecimentos. (LIMA, 2009, p. 152)

Em suas considerações finais, o autor afirma que apesar de ter se apoiado no levantamento de pesquisas com o objetivo de buscar resultados sobre ensino e aprendizagem de funções logarítmicas, a quantidade de produção acadêmica ainda é escassa e esses resultados não chegam ao conhecimento do professor. Para o autor ficou dúvida de como potencializar o uso de novas tecnologias no ensino de funções logarítmicas.

Segundo relato do professor colaborador, que se graduou recentemente, nunca houve em seu curso uma abordagem parecida com a THA. Sua ideia de construtivismo era muito diferente do que ele vivenciou durante a aplicação da THA. A professora que tem mais tempo atuando no magistério (20 anos) afirmou que em sua graduação não houve trabalho sobre metodologias de ensino.

Lima (2009) acredita que esses problemas são encontrados na formação do professor, pois durante os cursos de formação inicial e continuada não se possibilita a oportunidade de ter acesso às abordagens parecidas com a THA. Contudo, essas afirmações são hipóteses que necessitam de mais leituras e estudos para se chegar a uma conclusão.

Para o autor, não basta ao professor ter em mãos uma sequência de atividades que contemplem uma perspectiva construtivista sem propiciar momentos para suscitar desafios aos alunos na resolução de situações-problema, intervir e sistematizar o que foi trabalhado durante as aulas.

As leituras das pesquisas acima nos ajudaram na reflexão dos problemas e obstáculos no ensino da Função Logarítmica e na constatação de nossas assertivas acerca da atuação do professor de Ensino Médio no ensino dessa função. Constata-se que muitas vezes são enfatizadas apenas as funções afins e quadráticas e são exploradas de maneira superficiais as funções exponenciais e logarítmicas.

Também observamos a importância do estudo de funções utilizando *software* gráfico como estratégia de ensino e uma abordagem que priorize não somente a representação no registro algébrico como registro de partida.

Temos como hipótese que o uso do *software* no registro gráfico pode favorecer a visualização e pode contribuir para a percepção e a compreensão do aluno sobre o conceito de função, para quais valores uma função é crescente ou decrescente, reconhecer o domínio, imagem e o estudo da função inversa, não apenas de forma pontual, mas por meio da construção de uma tabela com a construção do gráfico por coordenadas no sistema cartesiano e também realizando uma análise no registro gráfico de forma global.

Relataremos a seguir o uso das Tecnologias no Ensino de Funções Logarítmicas.

3.4. O Uso das Tecnologias no Ensino de Funções Logarítmicas

Ao longo de nossa trajetória como docente, acreditamos que os usos de diversas tecnologias podem ser úteis para a construção do conhecimento dos alunos, desde que haja um planejamento prévio e tenhamos objetivos pré-estabelecidos de como será o direcionamento do uso da tecnologia, quais

expectativas, quais tipos de tecnologias serão utilizados e como avaliar se houve construção deste conhecimento.

Para fundamentarmos a nossa pesquisa, fizemos reflexões acerca das leituras das dissertações relatadas anteriormente como Karrer (1999) que utilizou a calculadora como uma ferramenta de ensino, para possibilitar aos alunos que estabelecessem conjecturas, elaborar e experimentar hipóteses e justificar seus erros e acertos.

Ferreira (2006) constatou em sua pesquisa que o uso do *software* Winplot ajudou na compreensão pelos alunos de maneira visual de que a função logarítmica é a inversa da função exponencial por meio da representação no registro gráfico.

Lima (2009) deixou claro que o uso do *software* Winplot e o uso da calculadora científica foram muito importantes para sua pesquisa, pois os alunos ficaram motivados em experimentar outras maneiras de aprender funções, além das tecnologias já conhecidas por eles, tais como a construção de gráficos com o uso de régua e papel milimetrado.

As Orientações Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 2006) ressaltam a importância do professor de Matemática tornar acessível aos seus alunos outras tecnologias diferentes daquelas que eles já possuem.

Segundo este documento oficial, a tecnologia da informação e comunicação provocou um impacto na sociedade, e exige que os indivíduos para estarem inseridos nesta sociedade devem ser capazes de saber utilizá-las. No processo de aprendizagem da Matemática essas tecnologias podem servir de subsídios para obter sucesso. Na formação escolar é necessário que o aluno compreenda a Matemática para a tecnologia e esta como ferramenta para entender a Matemática.

O uso das calculadoras e planilhas eletrônicas são instrumentos que facilitam o acesso à informação de forma rápida. Contudo, é necessário ter conhecimentos matemáticos para operar com esses instrumentos, é importante o aluno entender que a maneira como a calculadora efetua os cálculos é semelhante ao que é utilizado com lápis e papel ou cálculo mental. Muitas vezes

somos questionados pelos alunos quando aparece uma mensagem de “ERRO” na calculadora como, por exemplo, ao digitar o $\sqrt{-2}$ ou $\frac{2}{0}$ e nesse momento é fundamental que o professor questione o aluno do motivo desta mensagem, e promova uma discussão das condições de existência de um determinado objeto matemático, ou da necessidade da ampliação dos conjuntos numéricos na resolução de problemas que apareceram ao longo da História da Matemática.

No que se refere à Tecnologia para a Matemática, o documento aponta a necessidade de o professor utilizar *softwares* matemáticos para que os alunos possam explorar e construir diferentes conceitos matemáticos, de forma que eles façam experimentos, elaborem conjecturas, testem hipóteses e criem estratégias para resolver problema.

Para o estudo das funções, das equações e das desigualdades da geometria analítica (retas, círculos, cônicas, superfícies), tem-se uma grande variedade de programa de expressão. Em muitos desses programas, pode-se trabalhar com coordenadas cartesianas como com coordenadas polares. Os recursos neles disponibilizados facilitam a exploração algébrica e gráfica, de forma simultânea, e isso ajuda o aluno a entender o conceito de função, e o significado geométrico do conjunto-solução de uma equação - inequação (BRASIL, 2006, p. 89).

Dreyfus (1991) argumenta que o uso de um ambiente de aprendizagem computacional no Ensino da Matemática pode favorecer os Processos do Pensamento Matemático Avançado tais como a visualização, observação, abstração e a generalização. Muitas vezes a representação de um mesmo conceito utilizado de forma alternada por meio de um *software* pode suscitar relações normalmente implícitas e torná-las explícitas. Essa explicitação pode contribuir para que o estudante estabeleça relações entre ideias, em síntese para a formação de conceitos.

Por outro lado há críticas no uso das Tecnologias sem um planejamento, é importante que o professor elabore estratégias pedagógicas para o uso das Tecnologias, no ensino de determinado objeto matemático. Até porque ao utilizar tecnologia na Educação Matemática, segundo a concepção de apenas consumir tecnologia, pode trazer eficiência para a realização de tarefas antigas, mas pode gerar dependência ao realizar essas tarefas fora do ambiente tecnológico proposto (FROTA; BORGES, 2004).

[...] Não se pode pretender a inserção de quaisquer tecnologias em espaços de ensino-aprendizagem sem a crítica do uso, ela mesma permeando um projeto pedagógico e uma estratégia que contemplem a participação de alunos e professores como figuras principais do processo, a partir da proposta de que o foco deve ser posto nas pessoas, de modo a promover nas mesmas novas possibilidades de interação, de aprendizado compartilhado e colaborativo, com vistas à ampliação da autonomia (OLIVEIRA, 2008, p.298).

Segundo Ponte e Canavarro (1997) as tecnologias permitem a ampliação do aspecto experimental da Matemática, o que facilita o desenvolvimento entre os alunos de um impulso investigativo semelhante à atuação dos matemáticos.

Neste contexto pretendemos em nossa pesquisa utilizar o *software* GeoGebra e a calculadora científica como estratégias didático-pedagógicas, propiciando abordagens interativas e colaborativas entre os alunos participantes, para que possa favorecer um ambiente de investigação matemática em que estes possam desenvolver processos do Pensamento Matemático Avançado (DREYFUS, 1991), tais como fazer observações, estabelecer conjecturas, formular hipóteses generalizações e abstrações.

Utilizaremos o GeoGebra¹² que é um *software* de geometria dinâmica que reúne geometria, álgebra e cálculo, desenvolvido por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburgo na Áustria.

Este *software* possibilita a realização de construções com pontos, vetores, segmentos, retas, cônicas como funções que podem ser modificados de modo dinâmico, também possibilita a inserção de equações e coordenadas diretamente na janela gráfica e algébrica. Assim, o *software* GeoGebra tem a potência de trabalhar com variáveis vinculadas a números, vetores, pontos; permite determinar derivadas e integrais de funções e oferece um conjunto de comandos próprios da análise matemática, para identificar pontos singulares de uma função, como raízes e extremos.

¹² Disponível em <http://www.geogebra.org> acesso em: 22/07/2010.

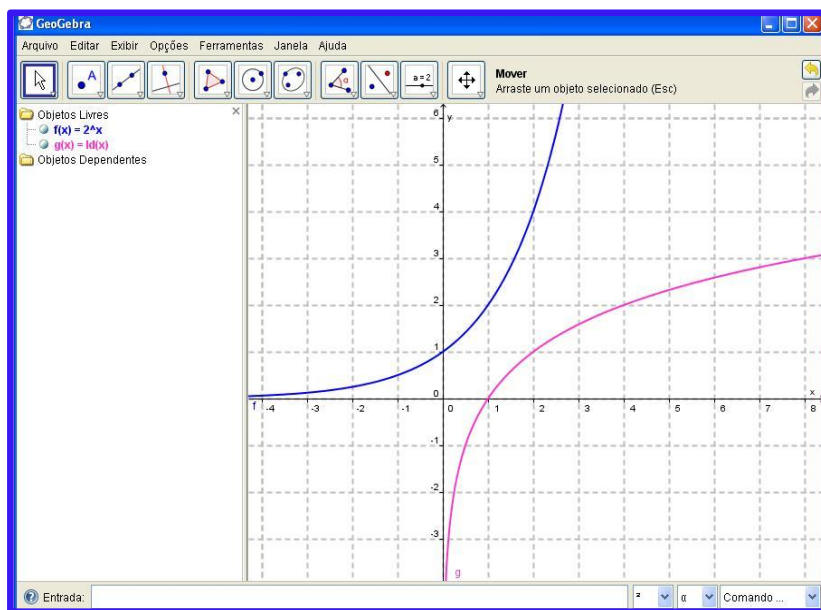


Figura 11 - Janela do *software* GeoGebra.

Fonte: Elaborada pela autora.

Escolhemos o *software* GeoGebra por ser gratuito e de fácil manipulação. Não necessita de conhecimento prévio de informática e propicia uma interação dinâmica entre o usuário-*software*. Possibilita a visualização simultânea entre a conversão dos registros de representações algébricas, geométricos e gráficos, segundo Duval (2009).

Desta forma pretendemos elaborar uma sequência didática de ensino que privilegia uma abordagem por situações-problema que envolva potências, funções exponenciais e logarítmicas. Para tanto, pretendemos utilizar algumas atividades do Caderno do Professor elaborado pela Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2008), e a partir dessas atividades fazer adaptações, caso necessário de forma que se possa privilegiar a coordenação entre a conversão dos registros de representações semióticas fundamentada pela teoria de Duval (2009) e observar quais processos do Pensamento Matemático Avançado podem ser suscitados durante a aplicação da sequência didática e nas análises dos resultados.

3.5. História da invenção dos logaritmos

Acreditamos que o ensino da Matemática pode se tornar mais prazeroso para os alunos quando o professor cita a História da Matemática ao iniciar o estudo de um determinado conteúdo.

É importante que os alunos saibam como a Matemática desenvolveu-se com o passar do tempo e não vê-la como uma ciência “pronta e acabada” ou “exata” como geralmente é afirmada pelo senso comum.

Ao iniciar o estudo de um tópico da Matemática é comum ouvirmos perguntas do tipo “Por que temos que estudar este tópico?”. Segundo Ávila, em situação como essa, o professor pode aproveitar este momento de curiosidade do aluno para fazer pequenos relatos da história da Matemática e estimular seu interesse pela disciplina.

Temas como a história do número zero, a história dos algarismos, os números negativos, números complexos, a história do número π , entre outros conteúdos que são abordados ao longo da Educação Básica “podem despertar a curiosidade dos alunos e transformar o desinteresse do aluno pela Matemática em sua ativa participação no aprendizado” (ÁVILA, 2007, p.11).

Concordamos com as OCEM (2006) no que diz respeito à utilização da História da Matemática em sala de aula:

[...] também pode ser vista como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos. É importante, porém, que esse recurso não fique limitado à descrição de fatos ocorridos no passado ou à apresentação de biografias de matemáticos famosos. A recuperação do processo histórico de construção do conhecimento matemático pode se tornar um importante elemento de contextualização dos objetos de conhecimento que vão entrar na relação didática. A História da Matemática pode contribuir também para que o próprio professor compreenda algumas dificuldades dos alunos, que de certa maneira, podem refletir históricas dificuldades presentes na construção do conhecimento matemático (BRASIL, 2006, p. 86).

Neste capítulo, iremos focalizar apenas a história da invenção dos logaritmos, e a repercussão desta invenção na comunidade científica da época e também a relação da quadratura da hipérbole com a função logarítmica.

Segundo Eves (2008) a invenção dos logaritmos foi recebida pela comunidade científica de um modo muito entusiástico, pois havia uma preocupação em facilitar a manipulação de dados numéricos, devido à expansão do conhecimento científico no século XVI e o início XVII nas áreas da geografia, física e astronomia.

John Napier (1550-1617) ficou conhecido pela ideia matemática abstrata que levou 20 anos para des envolver: os logaritmos.

Era bem versado em trigonometria e sem dúvida era familiarizado com a fórmula $\operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)]$ e outras fórmulas da trigonometria conhecidas como regras *prostaffaréticas*, da palavra grega que significa “adição e subtração” (MAOR, 2008). O objetivo era transformar o produto, determinando a soma ou a diferença de outras expressões trigonométricas como, por exemplo, $\cos(A - B)$ e $\cos(A + B)$, de forma que pudesse facilitar transformações de operações aritméticas em outras mais simples.

Mas a abordagem de Napier para eliminar o fantasma das longas multiplicações e divisões difere consideravelmente da prostaférese e se baseia no fato de que, associando-se aos termos de uma progressão geométrica os da progressão aritmética (EVES, 2008, p. 344).

Por exemplo, a sequência 1, 2, 4, 8, 16,... é uma progressão geométrica de razão 2. O matemático alemão Michael Stifel (1487-1567), estabeleceu uma relação entre a progressão geométrica e os expoentes inteiros.

Napier estendeu para uma faixa contínua de valores, ou seja, a ideia chave que está para os logaritmos é que se pudermos escrever qualquer número positivo como uma potência de algum número fixo (o qual depois seria chamado de base), então a multiplicação e a divisão de números seria o equivalente à adição ou à subtração de seus expoentes.

O autor ilustrou a ideia de Napier da seguinte maneira:

n	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

Figura 12 - Potências de base 2.

Fonte: Maor, 2008, p. 20.

A Figura 12 mostra potências sucessivas de base 2, começando com $n = -3$ e terminando em $n = 12$. Se quisermos multiplicar 64 por 16, basta procurarmos na tabela os expoentes correspondentes a 64 e 16, que são respectivamente 6 e 4. Basta somar esses expoentes para obtermos 10, ao procurar o número correspondente ao expoente 10 é o 1024 que será o resultado da multiplicação desejada.

Segundo Maor (2008), este método é desnecessário para calcular operações com números inteiros, mas a utilidade prática seria relevante se pudessem utilizar quaisquer números, inteiros ou frações e para isso seria necessário preencher os grandes espaços entre os números da tabela 1. O que poderia ser feito utilizando expoente fracionário como pode ser descrito por $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. No entanto, expoentes fracionários não eram inteiramente conhecidos na época de Napier.

Napier escolheu como base um número suficiente pequeno, de modo que suas potências cresçam lentamente. Depois de muitos anos, o matemático decidiu-se por 0,9999999 ou $1 - 10^{-7}$. Maor (2008) salienta que a escolha por esta base, era para minimizar o uso das frações decimais, pois a extensão desses números havia sido recentemente introduzida na Europa, e o público não se sentia confortável com elas.

Como seu objetivo era reduzir os enormes trabalhos no cálculo trigonométrico, dividiu-se o raio de um círculo unitário em 10.000.000 ou 10^7 partes, e desta forma ao subtrair uma unidade inteira sua 10^7 obtemos o número próximo de 1 nesse sistema, ou seja $1 - 10^{-7}$ ou 0,9999999, que é uma taxa comum (“proporção”, nas palavras de Napier) usada para construir sua tabela. O autor relata que Napier levou vinte anos de sua vida (1594 – 1614) para completar

o seu trabalho, fazendo subtrações repetidas, para construir os termos sucessivos de sua progressão. Sua tabela inicial continha apenas 101 elementos, começando por $10^7 = 10.0000.000$, seguida de $10^7(1 - 10^{-7})^2 = 9.999.999$ e daí por diante até $10^7(1 - 10^{-7})^{100} = 9.999.9000$ (ignorando a parte fracionária 0,0004950) e assim repetiu o processo novamente.

De fato, essa tarefa obtendo ajuda de uma calculadora ou computador poderia ser feito em algumas horas. No entanto, Napier fez todos esses cálculos com papel e pena. Após ter completado sua tarefa, Napier chamou sua criação a princípio de expoente de cada potência de “número artificial”, mas depois decidiu pelo termo *logaritmo*, que significa “número proporcional”.

Em 1614 foi publicada por Napier sua invenção intitulada em latim “*Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrição do maravilhoso cânone dos logaritmos) e posteriormente outro trabalho, *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (Construção do maravilhoso cânone dos logaritmos) foi publicado por seu filho Robert em 1619.

A invenção de Napier foi reconhecida por toda Europa e até locais distantes como a China e adotada por muitos cientistas, como Johannes Kepler, que utilizou com grande sucesso em seus trabalhos sobre as órbitas planetárias.

O único rival de Napier quanto à prioridade da invenção dos logaritmos foi o suíço Jobst Burgi (1552-1632) que construiu uma tábua de logaritmo independentemente de Napier e publicou seus resultados seis anos depois de Napier. (EVES, 2008, p. 346)

Enquanto a abordagem de Napier era geométrica, a de Burgi era algébrica. Hoje em dia, um logaritmo é universalmente considerado como um expoente; assim, se $n = b^x$, dizemos que x é o logaritmo de n na base b . Dessa definição as leis dos logaritmos decorrem imediatamente das leis dos expoentes. Uma das incongruências da história da matemática é que os logaritmos foram descobertos antes de se usarem expoentes (EVES, 2008, p. 346).

Um professor do Colégio Grescham em Londres, Henry Briggs (1561-1631) ficou impressionado com a invenção de Napier que, segundo Maor (2008), interessou-se em se encontrar com o grande inventor na Escócia.

No encontro de Briggs com Napier, o professor sugeriu várias modificações nas tabelas, como fazer o logaritmo de 1 igual a zero no lugar de 10^7 , e ter o logaritmo de 10 igual a uma potência apropriada de 10, então decidiram que o $\log 10 = 1 = 10^0$ e com isto nasceu o conceito de *base*.

Como Napier já estava com idade avançada, Briggs computou as novas tabelas e publicou seus resultados em 1624 sob o título de *Arithmetica Logarithmica*. Eram tábuas com logaritmos de base 10 para todos os inteiros de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000 com uma precisão de 14 decimais. O espaço entre 20.000 e 90.0000 editado pelo holandês Adriaan Vlacq (1660-1667) e incluído na segunda edição da *Arithmetica Logarithmica* (1628). Outras tabelas foram feitas com precisão de 20 casas decimais na Inglaterra como parte das celebrações do tricentenário da invenção dos logaritmos, nesta comemoração em Edimburgo em 1914, Lord Moulton falou em sua homenagem:

A invenção dos logaritmos chegou ao mundo como um relâmpago num dia claro. Nenhum trabalho anterior conduziu a ela, ou previu, ou sugeriu seu aparecimento. Ela permanece isolada, surgindo abruptamente no pensamento humano, sem derivar do trabalho de outros intelectos ou seguir linhas conhecidas de pensamento matemático. (MAOR, 2008, p. 28)

Após a adoção dos logaritmos pela comunidade científica, outras inovações foram construídas, como usar uma régua, na qual os números poderiam ser colocados em espaços proporcionais aos seus logaritmos. William Oughtred (1574-1660) usou duas escalas logarítmicas que pudessem mover-se, uma em relação à outra, esse instrumento foi publicado em 1622, "... o matemático construiu duas versões: uma régua de cálculo linear e uma circular, onde as duas escalas eram marcadas em discos que podiam girar em torno de um eixo comum" (MAOR, 2008, p.29).

A régua de cálculo foi companheira fiel de todos os cientistas e engenheiros durante os 350 anos que seguiram, segundo Maor (2008). No início da década de 1970 apareceram as primeiras calculadoras eletrônicas manuais e em pouco tempo a régua de cálculo tornou-se obsoleta.

[...] O ensino dos logaritmos, como instrumento de cálculo, está desaparecendo das escolas, com o advento das calculadoras portáteis [...]

A função logaritmo, porém, nunca morrerá, pela simples razão de que as variações exponenciais e logarítmicas são partes vitais da natureza e da

análise. Consequentemente, um estudo das propriedades da função logaritmo e de sua inversa, a função exponencial, permanecerá sempre uma parte importante do ensino da matemática (EVES, 2008, p. 347).

Concordamos com os autores, os logaritmos não possuem mais o papel central na matemática computacional, contudo, a função logarítmica permanece no centro de quase todos os ramos da matemática, pura ou aplicada. As aplicações dessas funções abrangem a química, biologia, arte, música e psicologia.

3.6. A relação da quadratura da hipérbole com a função logarítmica

O método utilizado para encontrar a área de uma forma plana fechada é conhecido como quadratura. Segundo Maor (2008) a palavra *quadratura* é uma forma de expressar em termos de unidade de área, que são quadrados. Se quisermos encontrar a área de um retângulo de lados a e b e se este retângulo deve ter a mesma área de um quadrado de lado x então teremos: $x^2 = ab$ ou $x = \sqrt{ab}$. Ao usar um esquadro e um compasso poderemos construir um segmento de comprimento \sqrt{ab} e encontrar a quadratura de qualquer retângulo, paralelogramo ou triângulo a partir de construções simples, pois polígonos podem ser sempre dissecados em triângulos.

Com o passar do tempo, a demonstração geométrica de um problema de quadratura abriu caminho para uma abordagem mais computacional, ou seja, a construção real de uma forma equivalente não era mais considerada necessária, desde que fosse possível demonstrar que tal construção poderia ser feita. Em princípio neste sentido o método da exaustão¹³ não era considerado como uma quadratura, pois exigia infinitos passos e não apenas uma abordagem geométrica. Contudo, com a introdução dos processos infinitos na matemática,

¹³ Método para o cálculo de áreas presente em Arquimedes (287-212 a. C.), que calculou a área da superfície compreendida por um segmento parabólico e um segmento de reta interceptando a parábola, por métodos semelhantes aos da integração que foram estabelecidos quase vinte séculos depois. (BROLEZZI; BARUFI, 2007, p. 10).

em meados de 1600, o problema da quadratura passou a ser puramente computacional.

Maor (2008) relata que uma das formas que resistiam a todas tentativas da quadratura era a hipérbole. Esta curva é obtida quando um cone é cortado por um plano num ângulo maior que o ângulo existente entre a base do cone e seu lado, e possui um par de linhas retas associadas a ela, suas duas linhas tangentes no infinito. Ao mover ao longo de cada ramo, afastando-se do centro, é possível aproximar cada vez mais dessas linhas, sem ser nunca alcançadas. Essas linhas são definidas como *assíntotas* da hipérbole (palavra grega “não se encontrando”); que são manifestações geométricas do conceito de limite.

Segundo o autor, os gregos estudaram as seções cônicas por uma abordagem geométrica com a invenção da geometria analítica no século XVII, o estudo desses objetos geométricos e das curvas em particular tornou cada vez mais parte da álgebra e no lugar da curva em si, foi considerada a *equação* que relacionava as coordenadas x e y de um ponto da curva e assim foi descoberto que cada uma das seções cônicas é um caso especial de uma *equação quadrática* na forma geral é $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey = F$.

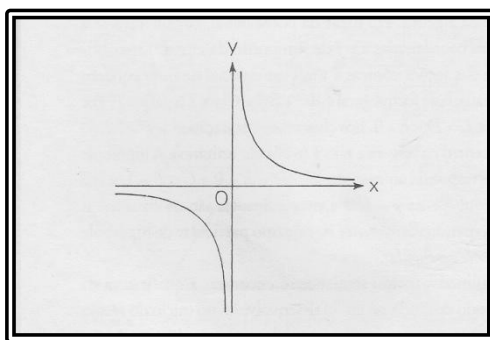


Figura 13 - A hipérbole retangular.

Fonte: Maor, 2008, p.86.

A hipérbole mostrada na Figura 13 corresponde ao caso $A = B = D = E = 0$ e $C = F = 1$; e sua equação é $x \cdot y = 1$ ou $y = \frac{1}{x}$ e suas assíntotas são os eixos x e y . Como as assíntotas são perpendiculares entre si. Esse tipo de hipérbole é conhecido como *hipérbole retangular*.

O autor relata que Arquimedes tentou sem sucesso encontrar a quadratura da hipérbole. Posteriormente outros matemáticos se voltaram para resolver este problema.

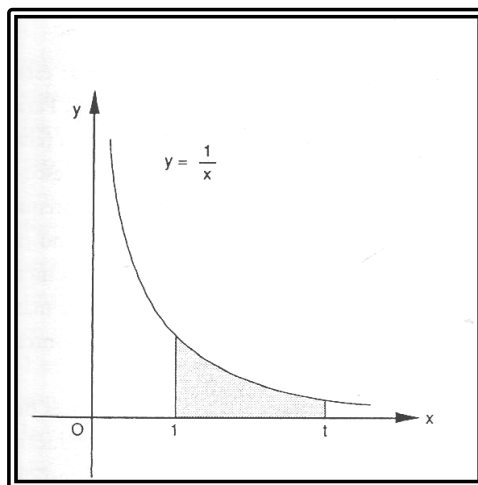


Figura 14 - A área sob a hipérbole retangular de $x = 1$ e $x = t$.

Fonte: Maor, 2008, p.87.

A hipérbole é uma curva que vai ao infinito, e segundo Maor (2008) é necessário esclarecer o que significa quadratura neste caso, a figura acima,

[...] mostra um ramo da hipérbole $xy = 1$. No eixo dos x nós marcaremos o ponto fixo $x = 1$ e o ponto arbitrário $x = t$. Por *área sob a hipérbole* queremos nos referir à área entre o gráfico de $xy = 1$, o eixo dos x e as linhas verticais (ordenadas) $x = 1$ e $x = t$. É claro que o valor numérico desta área ainda vai depender de nossa escolha de t , sendo, portanto uma função de t . Vamos chamar essa função $A(t)$. O problema da quadratura da hipérbole resume-se a encontrar esta função, isto é, exprimir a área como uma fórmula envolvendo a variável t (MAOR, 2008, p. 86).

Dentre os matemáticos destacados por Maor (2008) que tentaram resolver o problema da quadratura da hipérbole estão Pierre de Fermat (1601-1665), René Descartes (1596-1650) e Blaise Pascal (1623-1662). Em 1637 Descartes publicou a obra *La Géométrie* que teve influência em várias gerações de matemáticos, e apresentou ao mundo a Geometria Analítica. Este fato colocou um fim na geometria grega clássica, na qual era fundamental a construção geométrica e a prova, e a geometria tornou-se uma parte inseparável da álgebra, e depois ao cálculo.

Pierre de Fermat interessou-se na quadratura de curvas do tipo $y = x^n$ onde n é um número positivo. Tais curvas são chamadas de parábolas

generalizadas. Fermat fez um trabalho semelhante ao método de exaustão de Arquimedes sem recorrer a uma série infinita. O matemático fez aproximação da área sob cada curva por meio de retângulos e as bases desses retângulos formam uma progressão geométrica

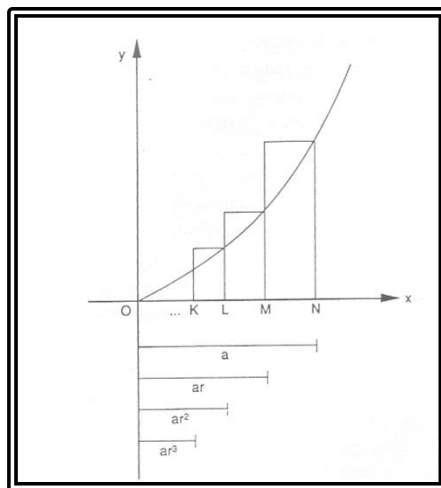


Figura 15 – O Método de Fermat.¹⁴

Fonte: Maor, 2008, p. 90.

A Figura 15 mostra uma porção da curva $y = x^n$ entre os pontos $x = 0$ e $x = a$ no eixo dos x . Seja o intervalo entre $x = 0$ e $x = a$ sendo dividido em um número de subintervalos pelos pontos K, L, M, N , em que $ON = a, OM = ar, OL = ar^2$ e r é menor que 1. Desta forma, as alturas (ordenadas) das curvas nesses pontos são: $a^n, (ar)^n, (ar^2)^n$, e encontrar a área de cada retângulo e então somar usando a fórmula do somatório para uma série geométrica infinita. A fórmula resultante é:

$$A_r = \frac{a^{n+1}(1-r)}{1-r^{n+1}} \quad (1)$$

onde r subscrito em A que a área depende da escolha r .¹⁵

¹⁴ O método de Fermat de aproximação da área sob o gráfico de $y = x^n$ através de uma série de retângulos, cujas bases formam uma progressão geométrica.

¹⁵ Método para o cálculo de áreas presente em Arquimedes (287-212 a. C.), que calculou a área da superfície compreendida por um segmento parabólico e um segmento de reta interceptando a parábola, por métodos semelhantes aos da integração que foram estabelecidos quase vinte séculos depois. (BROLEZZI; BARUFI, 2007, p. 10)

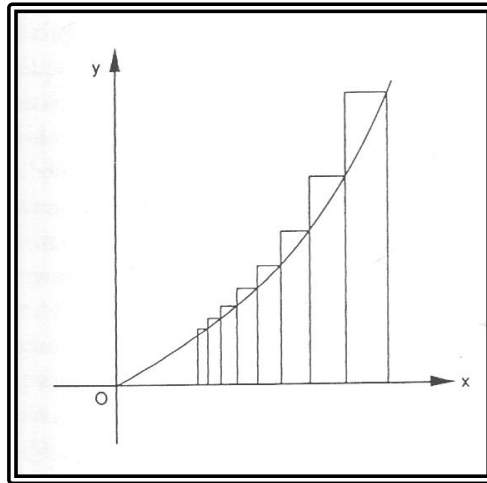


Figura 16 – Melhor aproximação da área por meio de retângulos menores.
Fonte: Maor, 2008, p. 91.

Para fazer uma aproximação melhor da área obtida, Fermat concluiu que a largura de cada retângulo devia se tornar pequena, de forma que a proporção comum r deve se aproximar de 1 e quanto mais próxima, melhor seria o encaixe entre o retângulo e a curva. (MAOR, 2008, p. 91)

Aliás, quando $r \rightarrow 1$, a equação 1 torna-se a expressão indeterminada $0/0$. Fermat foi capaz de contornar essa dificuldade notando que o denominador da equação (1), $1 - r^{n+1}$ pode ser escrito na forma fatorada, como $(1 - r)(1 + r + r^2 + \dots + r^n)$. Quando o fator $1 - r$ no numerador e denominador é cancelado, a equação (1) torna-se: $A_r = \frac{a^{n+1}}{1 + r + r^2 + \dots + r^n}$. Quando deixamos $r \rightarrow 1$, cada parcela no denominador tende a 1, o que resulta na fórmula $A = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ (MAOR, 2008, p. 91).

O autor ressalta que a integral $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ é exatamente o trabalho que Fermat desenvolveu em torno de 1640, trinta anos antes que Newton e Leibniz estabelecessem esta fórmula como parte de seu cálculo integral.

O trabalho de Fermat foi um avanço significativo, pois a quadratura envolveu uma família de curvas fornecida pela $y = x^n$ para valores inteiros, positivos de n .

Além disso, ao modificar ligeiramente seu procedimento, Fermat mostrou que a equação 2 permanece válida mesmo quando n é um inteiro *negativo*, desde que agora calculemos a área de $x = a$ (onde $a > 0$) até o infinito. Quando n é um inteiro negativo, digamos $n = -m$ (onde m é positivo), obtemos a família de curvas $y = x^{-m} = 1/x^m$, chamadas frequentemente de hipérboles generalizadas. Que a fórmula de Fermat funcione nesse caso é um tanto notável, já que as equações $y = x^m$ e $y = x^{-m}$ apesar de sua aparente semelhança representam tipos bem

diferentes de curvas: as primeiras são contínuas em toda a parte, enquanto as últimas se tornam infinitas em $x = 0$ e em consequência possuem uma “quebra” (assíntota vertical) neste ponto. (MAOR, 2008, p.92)

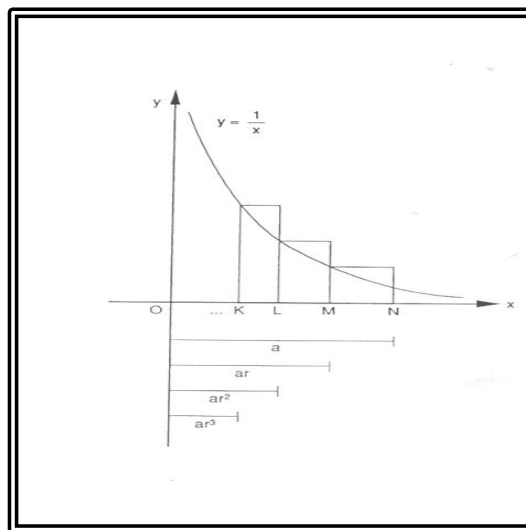


Figura 17 - O método de Fermat aplicado à hipérbole¹⁶.

Fonte: Maor, 2008, p. 92.

Contudo, a fórmula de Fermat não funcionou para a curva $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$, pois quando $n = -1$, o denominador $n + 1$ na equação 2 se torna 0.

Segundo o autor, não há certeza de quem de fato trabalhou neste caso particular, devido ao atraso da publicação do trabalho *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum conici* (1647) escrito pelo jesuíta belga Grégoire de Saint- Vincent (1548-1667) que passou maior parte de sua vida trabalhando em vários problemas de quadratura.

[...] mas parece que foi ele o primeiro a notar que quando $n = -1$, os retângulos usados na aproximação da área sob a hipérbole possuem, todos, *áreas iguais*. De fato (Figura 17), as larguras dos retângulos sucessivos, começando em N são $a - ar = a(1 - r)$, $ar - ar^2 = ar(1 - r)$, ..., e as alturas $N, M, L, ...$ são $a^{-1} = 1/a$, $(ar)^{-1} = 1/ar$, $(ar^2)^{-1} = 1/ar^2$, ..., as áreas são portanto $a(1 - a).1/a = 1 - r$, $ar(1 - r).1/ar = 1 - r$, e assim por diante. Isto significa que conforme a distância de 0 cresce geometricamente, as áreas correspondentes crescem em incrementos iguais – ou seja, *aritmeticamente* – isso continua sendo verdade ao passarmos ao limite quando $r \rightarrow 1$ (ou seja, quando fazemos a transição dos retângulos

¹⁶ Saint-Vicent percebeu que, quando as bases formam uma progressão geométrica, os retângulos possuem áreas iguais. Assim a área é proporcional ao logaritmo da distância horizontal (MAOR, 2008, p. 92).

discretos para a hipérbole contínua). Mas isso, por sua vez, implica que a relação entre a área e a distância é *logarítmica* (MAOR, 2008, p. 93).

Segundo Maor (2008), um dos alunos de Saint-Vicent, Alfonso de Sarasa (1618-1667), registrou explicitamente que se considerarmos $A(t)$ como a área sob a hipérbole, a partir de um ponto de referência fixo $x > 0$ até um ponto variável $x = t$, teremos $A(t) = \log t$, uma das primeiras ocasiões que se fez uso de uma *função logarítmica*, quando até então os logaritmos eram considerados principalmente uma ferramenta de cálculo.

O problema da quadratura da hipérbole foi solucionado após dois mil anos depois dos gregos que foram pioneiros em enfrentar o problema, mas permaneceu em aberto a fórmula $A(t) = \log t$ que fornece a área sob a hipérbole como uma função variável de t , mas segundo o autor, ainda não é adequada para a computação numérica, porque a base não foi estabelecida, no entanto, independente da escolha da base, a hipérbole $y = \frac{1}{x}$ e a área sob ela existe.

A base “natural” que determina esta área numericamente é o número e . Para chegar a essa conclusão, o autor relata a relação do cálculo diferencial e integral desenvolvido por Newton (1642 - 1727) e a descoberta de Fermat acerca da área sob a curva $y = x^n$ de $x = 0$ até algum $x < 0$ é dada pela expressão $\frac{x^{n+1}}{(n+1)}$ a mesma expressão da antiderivação de $y = x^n$. Newton percebeu que esta ligação entre a área e a antiderivação não era coincidência, que hoje são reconhecidos como os dois problemas fundamentais do cálculo, o problema da tangente e o problema da área, eram problemas *inversos*.

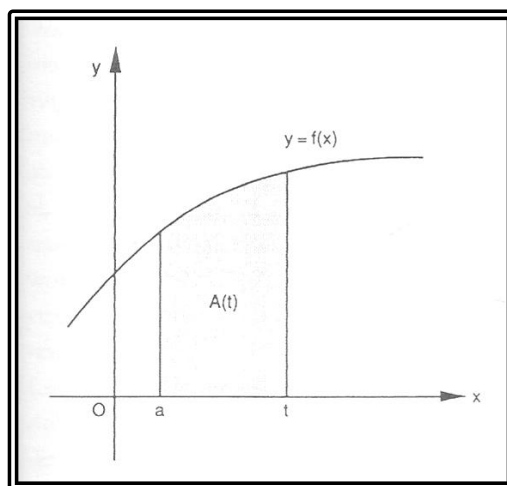


Figura 18 – A área¹⁷ sob o gráfico $y = f(x)$.

Fonte: Maor, 2008, p. 109.

Dada uma função $y = f(x)$, podemos definir uma nova função $A(t)$, que representa a área sob o gráfico de $f(x)$, de um valor fixo de x determinado, digamos $x = a$, a algum valor variável $x = t$. Vamos chamar esta função de *função de área* da função original. Trata-se de uma função de t , porque se mudarmos o valor de t , isto é, se movermos o ponto $x = t$ para a direita ou para a esquerda – a área sob o gráfico também mudará. O que Newton percebeu resume-se em: A taxa de mudança da função de área em relação à t é igual em cada ponto $x = t$, ao valor da função original nesse ponto. Mas isso por sua vez, significa que $A(t)$ é a antiderivada de $f(t)$. Assim, para encontrarmos a área sob o gráfico de $y = f(x)$ devemos encontrar uma antiderivada de $f(x)$, onde substituiremos a variável t por x . É nesse sentido que os dois processos – encontrar a área e encontrar a derivada – são opostos um do outro. Hoje essa relação inversa é conhecida como o Teorema Fundamental do Cálculo. (MAOR, 2008, p. 108).

O autor também relata o processo de encontrar o inverso da função exponencial. Se $y = e^x$ (denominada por função exponencial natural) e considerando y como sendo um valor determinado, o objetivo é resolver esta equação para x , isto é, expressar x em termos de y .

Lembramos que o *logaritmo comum* ou briggsiano de um número $y > 0$ é o número x para o qual $10^x = y$. Exatamente do mesmo modo, o *logaritmo natural* de um número $y > 0$ é o número x para qual $e^x = y$. E assim como escrevemos $x = \log y$ para o logaritmo comum (logaritmo de base 10) de y , também escrevemos $x = \ln y$ para o logaritmo natural (logaritmo de base e). O inverso da função exponencial é então a função

¹⁷ A área sob o gráfico de $y = f(x)$ de $x = a$ a $x = t$, é ela própria, uma função de t chamada $A(t)$ (MAOR, 2008, p.109).

logarítmica natural e sua equação, depois de trocar x e y , é $y = \ln x$. A Figura 19 mostra os gráficos de $y = e^x$ e de $y = \ln x$ plotados no mesmo sistema de coordenadas; como acontece com qualquer par de funções inversas, os dois gráficos são reflexos um do outro sobre a linha $y = x$. (MAOR, 2008, p. 142).

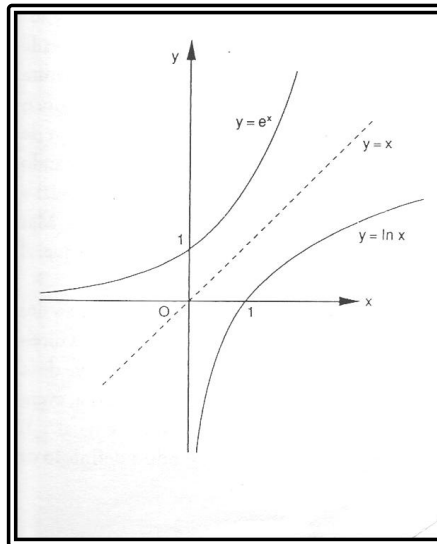


Figura 19 - As equações $y = e^x$ e $y = \ln x$ representam funções inversas.

Fonte: Maor, 2008, p. 98.

Com relação à taxa da variação, segundo a notação de Leibniz, a taxa de variação de uma função inversa é recíproca (um dividido por) da taxa de mudança da função original; em símbolo $dx/dy = 1/\left(\frac{dy}{dx}\right)$. No caso da função exponencial se $y = e^x$ e $\frac{dy}{dx} = e^x = y$ de modo que $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$ ou seja, a taxa de variação de x em função de y é igual a $\frac{1}{y}$ e isso significa que $x = \ln y$ porque $y = e^x$. Se as letras forem trocadas a fórmula será: Se $y = \ln x$, então $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ ou seja, $\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$ e isso significa que $\ln x$ é uma antiderivada de $\frac{1}{x}$: $\ln x = \int \frac{1}{x} dx$ (MAOR, 2008, p.142).

A fórmula $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$ em que c é a constante da integração explica a descoberta de Saint-Vicent de que a área sob a hipérbole segue uma função logarítmica. Se chamarmos esta área de $A(x)$, teremos $A(x) = \ln x + c$ se o ponto inicial desta área for inicialmente como $x = 1$, terá $0 = A(1) = \ln x + c$, no entanto, $\ln 1 = 0$ porque $e^0 = 1$ e assim teremos $c = 0$. Podemos concluir que a área sob a hipérbole $y = \frac{1}{x}$ de $x = 1$ a qualquer $x > 1$ é igual a $\ln x$. Este resultado dá ao número e um significado geométrico que o relaciona com a hipérbole: $A = \ln x \rightarrow A = 1$ quando $x = e$.

Em resumo, podemos notar que os logaritmos não foram inventados sem a intenção de contribuir com o desenvolvimento da Matemática e outras ciências, houve uma repercussão na sociedade científica, e esta invenção contribuiu com o desenvolvimento de outros conceitos.

A quadratura da hipérbole colocou a função logarítmica e o número e que foi o único número a ser definido por um processo de limite, $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ na vanguarda da Matemática. O momento crucial foi com a invenção do cálculo, quando se percebeu que o inverso da função logarítmica que depois foi denotado por e^x era igual a sua própria derivada (MAOR, 2008, p.241).

A maneira em que os fatos foram relatados segundo Maor (2008) nos mostra que a Matemática não foi desenvolvida de forma linear, mas que várias descobertas originaram-se de outras invenções.

E neste sentido, concordamos com os autores ao afirmarem que:

O senso comum atribui, quase que exclusivamente, à Matemática, uma característica de exatidão, por imaginar que as considerações realizadas em seu interior primam por serem exatas definitivas e inquestionáveis [...] (BROLEZZI; BARUFI, 2007, p. 20).

Desta forma, ao ensinar os conceitos relatados, o professor pode relatar essas descobertas para mostrar aos alunos que a Matemática atual levou muito tempo para ser sistematizada na forma que a conhecemos hoje e está em constante desenvolvimento.

Apresentaremos no próximo capítulo os procedimentos metodológicos que adotaremos ao longo do nosso trabalho.

Capítulo IV

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Antes de elaborarmos nossa sequência didática, fizemos um estudo de como é sugerido o ensino das funções logarítmicas e exponenciais nos documentos oficiais que relatamos anteriormente no capítulo 3, tais como os PCNEM (BRASIL, 1999), PCN+Ensino Médio (BRASIL, 2002), OCEM (BRASIL, 2006), matriz de referência do SAEB (BRASIL, 2005), as pesquisas referentes ao ensino e aprendizagem da Função Logarítmica, e um breve estudo histórico da invenção dos logaritmos.

Faremos a seguir uma descrição de como é apresentado o tema Função Logarítmica no Caderno do Professor de Matemática do 1º ano do Ensino Médio, volume 3 (2009). Este caderno, juntamente com o caderno do aluno faz parte de algumas ações do projeto “São Paulo Faz Escola – Uma Proposta Curricular para o Estado” implementado pela Secretaria Estadual de Educação de São Paulo em 2008, com o objetivo de propor uma educação de qualidade.

Escolhemos fazer essa descrição, devido a nossa sequência ser composta por algumas atividades que estão inseridas neste caderno.

Logo após a descrição do Caderno do Professor de Matemática, apresentaremos o relato da entrevista que fizemos como o ex-professor de Matemática dos alunos que participaram desta pesquisa, pois acreditamos ser relevante saber quais conhecimentos os alunos possuem ou não sobre o tema desta pesquisa.

4.1. Descrição do Caderno do Professor de Matemática

O caderno do Professor de Matemática, 1º ano do Ensino Médio – volume 3 tem como objetivo auxiliar os professores em suas práticas de sala de aula.

São propostas ao professor quatro Situações de Aprendizagens a serem trabalhadas durante o 3º bimestre com os alunos do 1º ano do Ensino Médio:

- ✓ As potências e o crescimento/decrescimento exponencial: a função exponencial;
- ✓ Quando o expoente é a questão, o logaritmo é a solução: a força da ideia de logaritmo;
- ✓ As funções com variável no expoente: a exponencial e sua inversa, a logarítmica.
- ✓ Problemas envolvendo expoentes e logaritmos em diferentes contextos: equações e inequações.

Unidade 1 – Consolidação da ideia de potência – significado e operações com expoentes inteiros, racionais e reais.

Unidade 2 – A função exponencial – crescimento, decrescimento e gráficos.

Unidade 3 – A ideia de logaritmo – uma ideia brilhante do século XVII cada vez mais importante no século XXI.

Unidade 4 – Propriedades dos logaritmos – logaritmos em diferentes bases.

Unidade 5 – Logaritmos em diferentes contextos: acidez, escala Richter e decibéis.

Unidade 6 – As funções com variável no expoente: a exponencial e sua inversa, a logarítmica.

Unidade 7 – Problemas envolvendo expoentes e logaritmos em diferentes contextos – equações e inequações.

Unidade 8 – Uma aplicação importante: o uso de gráficos com escala logarítmica.

Figura 20 - Quadro geral de conteúdos do 3º Bimestre do Ensino Médio.
Fonte: São Paulo, 2009 p. 10.

Ao longo do Ensino Fundamental, as potências foram apresentadas gradativamente, sendo que na 5ª série, as primeiras noções; na 7ª série, as

potências com expoentes inteiros e na 8ª série, expoentes racionais e reais. No 1º ano do Ensino Médio, o estudo das potências é consolidado por meio da função exponencial com destaque no crescimento ou decrescimento.

Já os logaritmos, uma invenção genial do século XVII, cuja motivação primeira era a simplificação dos cálculos em uma época de limitados instrumentos para tal, a despeito da abundância de recursos atuais, permanecem como um tema especialmente relevante, não em razão de tais simplificações, mas pela sua adequação para a descrição de fenômenos em que as variáveis aparecem no expoente. Apresentar seu significado mais profundo, o que contribuiu para que sua importância se conservasse, juntamente com as propriedades mais relevantes para seu uso em diferentes contextos. (SÃO PAULO, 2009, p. 9)

Observamos que o ensino de logaritmos está pautado nas sugestões apontadas nas Orientações Curriculares Nacionais do Ensino Médio (2006) e também na necessidade de apresentar situações e fenômenos que utilizam modelos logaritmos, como cálculo de juros, intensidade sonora, acidez de líquidos, etc.

A apresentação da função logarítmica é sugerida sendo reconhecida como a função inversa da exponencial neste documento, “uma vez que o que as distingue é apenas uma troca de posição entre as variáveis” (SÃO PAULO, 2009, p.9)

Se $y = a^x$, considerando x a variável independente, escrevemos $y = f(x) = a^x$, e temos uma função exponencial. Quando y é a variável independente, escrevemos $x = g(y) = \log_a y$, e temos uma função independente (SÃO PAULO, 2009, p. 9).

Na Situação de Aprendizagem 1 intitulada “As potências e o crescimento exponencial: a função exponencial” tem como objetivo consolidar as noções da potenciação como um recurso para a apresentação da função exponencial $y = a^x$ ou $f(x) = a^x$ sendo a base a um número positivo e diferente de 1. É sugerido ao professor duas semanas para trabalhar com esta situação de aprendizagem.

Observamos que nesta Situação de Aprendizagem é proposta uma situação-problema no registro da língua natural e os dados do problema são apresentados por meio de uma tabela, para que ao final os alunos possam generalizar que a variável está no expoente.

Alguns fatos fundamentais sobre potências

Suponhamos que no país **X** a produção de determinado alimento foi igual a 1 tonelada no final do ano 2000 e, em razão de incentivos econômicos, passou a triplicar anualmente a partir daí. Conforme ilustra a tabela a seguir:

Ano	Produção P (em toneladas)	Potência correspondente
2000	1	3^0
2001	3	3^1
2002	9	3^2
2003	27	3^3
2004	81	3^4
2005	243	3^5
2006	729	3^6
2007	2 187	3^7
2008	6 561	3^8
2009	19 683	3^9
...
2015	14 348 907	3^{15}
2000 + n		3^n

Figura 21 - Situação de Aprendizagem 1.

Fonte: São Paulo, 2009, p. 12.

Existe uma preocupação com o trabalho dos números irracionais feitos por meio de aproximações da $\sqrt{2}$ por excesso e aproximações por falta. Esta atividade é apresentada por meio de tabela.

Aproximação por falta	Raiz quadrada de 2	Aproximação por excesso
1,4	$\sqrt{2}$	1,5
1,41	$\sqrt{2}$	1,42
1,414	$\sqrt{2}$	1,415
1,4142	$\sqrt{2}$	1,4143
1,41421	$\sqrt{2}$	1,41422
1,414213	$\sqrt{2}$	1,414214
1,4142135	$\sqrt{2}$	1,4142136

Figura 22 - Aproximações da raiz quadrada de dois.

Fonte: São Paulo, 2009 p. 13.

Para definir a função exponencial, em que $y = a^x$, ou seja $f(x) = a^x$, foi proposta uma tabela com diversos valores de x e os correspondentes valores de $f(x)$, para alguns valores de a :

x	2^x	3^x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$
1	2	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
2	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$
3	$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$
0	$2^0 = 1$	$3^0 = 1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$	$\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$
-3	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$	$3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27$
$\frac{1}{2}$	$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1,41$	$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \approx 1,73$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,71$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,58$

Figura 23 - Situação de Aprendizagem 1.

Fonte: São Paulo, 2009 p. 14.

São propostos quatro exemplos para esboçar o gráfico das funções exponenciais em um mesmo sistema de eixo cartesiano ortogonal a partir de sua expressão algébrica, com o objetivo de observar o crescimento e decrescimento em cada caso.

Como exercícios complementares, são propostas situações-problema contemplando crescimento exponencial de população de micróbios, crescimento populacional, e a construção de gráficos do tipo $f(x) = a^{kx}$.

Na Situação de Aprendizagem 2 intitulada “Quando o expoente é a questão, o logaritmo é a solução: a força da ideia de logaritmo” tem como objetivo apresentar os logaritmos como um expoente.

Para o início do estudo de logaritmos, os autores ressaltam a importância da História da Matemática para o tratamento do tema. Os logaritmos foram criados no início do século XVII com o objetivo de simplificar os cálculos. Devido ao avanço tecnológico, as calculadoras já fazem este trabalho.

A História da Matemática, no entanto, revela-nos uma especial surpresa quando o assunto é logaritmo. A despeito de seu enorme sucesso no século XVII, hoje, em pleno século XXI, os logaritmos são mais importantes do que o foram no momento de sua criação. Já não precisamos mais deles para simplificar os cálculos, mas seu significado e a força de linguagem tornaram-se fundamentais para a expressão e a compreensão em diferentes contextos, alguns deles surgidos em pleno século XX: nas medidas da intensidade sonora, da energia destruidora dos terremotos, índice de um líquido, da rapidez com que uma substância radioativa se desintegra, etc. Sem dúvida, hoje mais do que ontem, é fundamental aprender logaritmos. (SÃO PAULO, 2009, p. 20)

Com o objetivo de compreender o significado dos logaritmos foi retomada a problemática inicial: a simplificação dos cálculos elaborada por alguns matemáticos como o inglês Henry Briggs (1561-1630) e o escocês John Napier (1550-1617), os autores do caderno solicitam calcular o valor da **E** apresentado na seguinte expressão:

$$E = \sqrt[5]{\frac{381,5 \cdot (20,87)^2 \cdot (4182)^4}{(7,935)^2}}$$

Para a resolução desta expressão, os matemáticos acima citados propuseram alternativas, como ideia de escrever qualquer número positivo N como uma potência de 10: $N=10^n$. Utilizando as propriedades das potências, em

que o cálculo da multiplicação se transforma em adição dos expoentes, a divisão poderá ser feita por meio da subtração dos expoentes e o cálculo de uma raiz se transforma no cálculo de uma divisão. Desta forma na expressão poderá ser escrita como:

$$381,5 = 10^a$$

$$20,87 = 10^b$$

$$4182 = 10^c$$

$$7,935 = 10^d$$

$$E = 10^{\left(\frac{a+3b+4c-2d}{5}\right)}$$

E a partir da apresentação desta expressão, os autores ilustram com exemplos que é possível representar qualquer número positivo N como 10^n com o objetivo de simplificar cálculos e definem: Se $N = 10^n$, então o expoente n é chamado “logaritmo de N ”: $n = \log N$. (SÃO PAULO, 2009, p. 21)

Após a discussão sobre o logaritmo como um expoente, encontramos no Caderno do Professor de Matemática (SÃO PAULO, 2009) uma tabela de logaritmos. Segundo os autores, os valores apresentados foram escolhidos como exemplos, mas são sugestivos de certas regularidades existentes em uma tabela de logaritmos.

$N (N = 10^n)$	$n (n = \log N)$
10 000	4
6 000	3,77815
3 000	3,47712
2 000	3,30103
1 000	3
600	2,77815
300	2,47712
200	2,30103
100	2
60	1,77815
30	1,47712
20	1,30103
10	1
6	0,77815
3	0,47712
2	0,30103
1	0

Figura 24 - Alguns valores da tabela de logaritmos.

Fonte: São Paulo, 2009 p. 22.

O objetivo da tabela de logaritmos (Figura 24) não é colocar o logaritmo de todos os números, mas a partir dos números escolhidos, calcular outros logaritmos. Como primeiro exercício, é solicitado para calcular outros logaritmos a partir da tabela.

No segundo exercício, o enfoque é dado a uma situação-problema do crescimento da população de duas cidades diferentes. Os modelos de crescimento das duas cidades são descritos por uma função exponencial de base 10.

Para o estudo dos logaritmos em qualquer base os autores apresentam tabela abaixo.

Potência	Logaritmo
$8 = 2^3$	$3 = \log_2 8$
$243 = 3^5$	$5 = \log_3 243$
$625 = 5^4$	$4 = \log_5 625$
$81 = 9^2$	$2 = \log_9 81$
$9 = 81^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2} = \log_{81} 9$
$3 = 81^{\frac{1}{4}}$	$\frac{1}{4} = \log_{81} 3$
$11 = 121^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2} = \log_{121} 11$
$\frac{1}{32} = 2^{-5}$	$-5 = \log_2 \left(\frac{1}{32} \right)$
$27 = \left(\frac{1}{3} \right)^{-3}$	$-3 = \log_{\frac{1}{3}} 27$
$\frac{1}{32} = \left(\frac{1}{2} \right)^5$	$5 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{32} \right)$
$\sqrt[3]{7} = 7^{\frac{1}{3}}$	$\frac{1}{3} = \log_7 \sqrt[3]{7}$
$\frac{1}{\sqrt{5}} = 5^{-\frac{1}{2}}$	$-\frac{1}{2} = \log_5 \frac{1}{\sqrt{5}}$
$N = N^1$	$1 = \log_N N$
$1 = 17^0$	$0 = \log_{17} 1$
$N = a^7$	$7 = \log_a N$
$N = 13^a$	$a = \log_{13} N$
$x = 3^n$	$n = \log_3 x$
$x = y^z$	$z = \log_y x$

Figura 25 - Tabela de Potências e Logaritmos.

Fonte: São Paulo, 2009 p.25.

É sugerido aos professores que priorizem a exploração da tabela (Figura 25) para que não haja dúvidas, pois são informações necessárias para a construção de gráficos na Situação de Aprendizagem 3.

Propriedade	Potências		Logaritmos	
	$M = a^m$	$N = a^n$	$m = \log_a M$	$n = \log_a N$
Produto	$M \cdot N = a^{m+n}$		$\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$	
Quociente	$\frac{M}{N} = a^{m-n}$		$\log_a \left(\frac{M}{N} \right) = \log_a M - \log_a N$	
Potência	$M^k = a^{mk}$		$\log_a (M^k) = k \cdot \log_a M$	
Raiz	$\sqrt[k]{M} = M^{\frac{1}{k}} = a^{\frac{m}{k}}$		$\log_a \left(M^{\frac{1}{k}} \right) = \frac{1}{k} \cdot \log_a M$	

Figura 26 - Relação das propriedades das potências com as propriedades dos logaritmos.
Fonte: São Paulo, 2009 p. 29.

Após o estudo da tabela, são apresentados vários exercícios para o cálculo de logaritmos e aplicação em situações-problema.

As propriedades dos logaritmos são apresentadas na tabela abaixo, para que os alunos façam a relação entre as propriedades das potências e dos logaritmos.

Para ilustrar os diferentes contextos em que os logaritmos podem ser utilizados como modelos matemáticos em aplicações no mundo real são propostos textos explicativos sobre a escala de Richter para medir a intensidade de terremotos, o pH dos líquidos para caracterizar a acidez e para medir a intensidade sonora do ouvido humano.

Observamos que esta Situação de Aprendizagem é muito rica em situações-problema, no entanto, as tabelas informativas sobre os logaritmos e suas propriedades deveriam ser construídas pelos alunos. Acreditamos que este procedimento poderia estimular os estudantes a conjecturar, levantar e testar

hipóteses para chegar à generalização e assim propiciar o que Dreyfus chama de aprendizagem por descoberta,

A Situação de Aprendizagem 3 intitulada “As funções com variável no expoente: a exponencial e sua inversa, a logarítmica” tem como objetivo estabelecer a relação entre as funções exponenciais e logarítmicas por meio da determinação do cálculo da função inversa e explorar o crescimento e decrescimento do gráfico dessas funções.

O paralelismo entre as propriedades das potências e as dos logaritmos servirá de base para o estabelecimento das relações entre as funções exponencial e logarítmica, bem como de seus gráficos. (SÃO PAULO, 2009, p. 37)

Para iniciar este estudo, é retomado o conceito da função exponencial, na construção de tabelas de valores para x e a^x para diferentes valores de a :

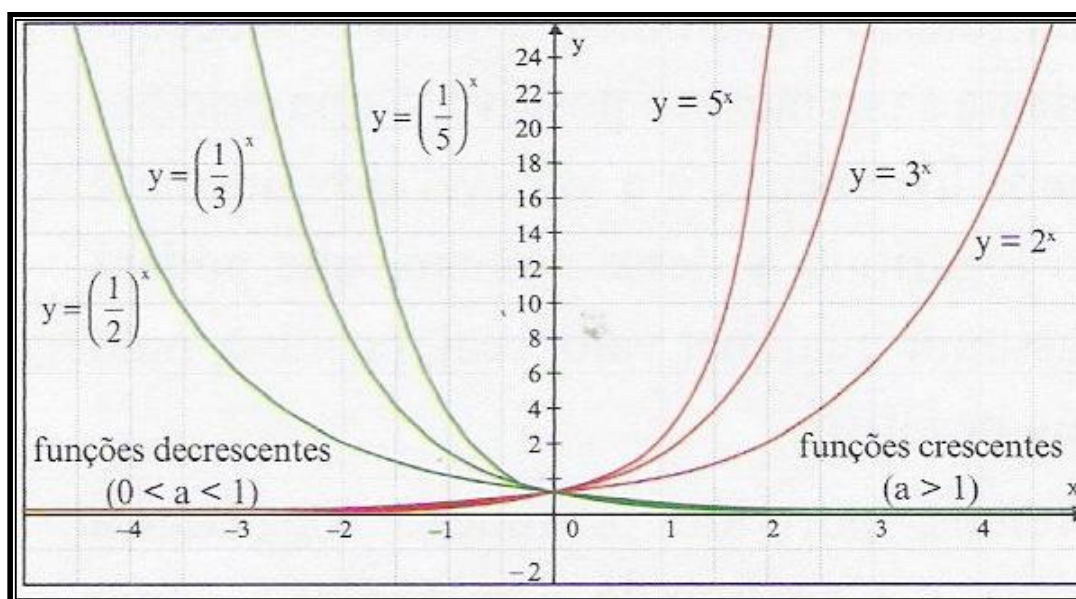


Figura 27 - Gráficos da função exponencial para diferentes valores de a .

Fonte: São Paulo, 2009, p. 37.

Se $y = a^x$, então $x = \log_a y$. Observamos que tal fato no gráfico da função exponencial quando $a < 1$:

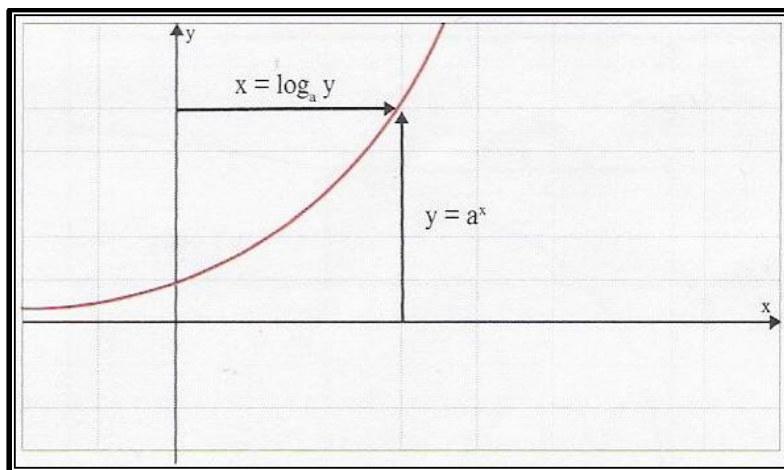


Figura 28 - Gráfico da Função Exponencial no caso em que $a > 1$.

Fonte: São Paulo, 2009, p. 37.

Portanto, a cada número positivo y corresponde a um número real x , que seu é o seu logaritmo na base a . A cada correspondência entre cada número positivo e seu logaritmo em uma determinada base a , ou seja, é possível definir a cada número positivo, associa seu logaritmo. Essa função será chamada de função logarítmica e representada por $f(x) = \log_a x$. Observando o nome das variáveis: na função exponencial, x é a variável independente, à qual atribuímos qualquer valor real, positivo, nulo ou negativo, e $y = a^x$ é a variável dependente do valor de x , que será, no caso em questão, sempre positiva. Na função logarítmica, a variável independente é um número positivo y , que escolhemos livremente, e a variável dependente é o logaritmo x desse número, que poderá assumir qualquer valor real, positivo, nulo ou negativo. Temos, portanto, a função logarítmica $x = \log_a y$ (SÃO PAULO, 2009 p. 37-38).

Notamos que em todo momento é enfatizada a relação entre a função exponencial e logarítmica. Para o estudo do crescimento e decrescimento da função logarítmica, a construção do gráfico de x em função de y , situando o eixo y na horizontal para a variável independente, e representando os valores de x na vertical, temos o gráfico a seguir (caso $a > 1$).

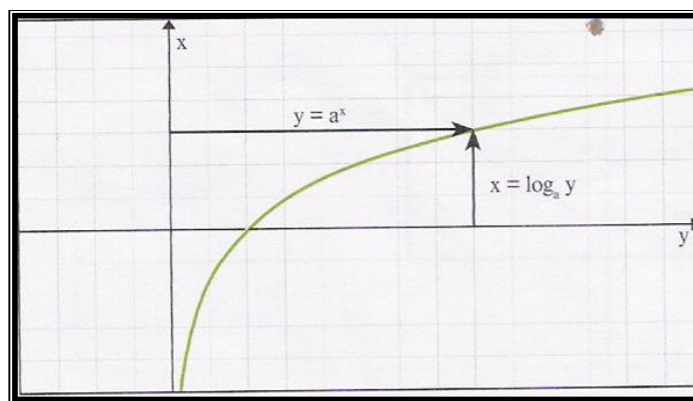


Figura 29 - Gráfico da função Logarítmica no caso em que $a > 1$.

Fonte: São Paulo, 2009, p. 38.

Naturalmente, se nomearmos a variável independente de x , como é usual, então a variável dependente y será tal que, $y = \log_a x$ ou seja, a função logarítmica é representada por $f(x) = \log_a x$ (SÃO PAULO, 2009, p. 38).

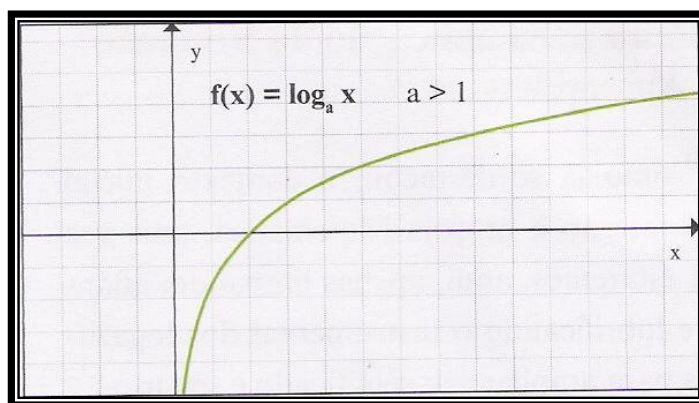


Figura 30 - Gráfico da Função Logarítmica no caso em que $a > 1$.
Fonte: São Paulo, 2009, p. 38.

No caso acima, quando $a > 1$ tanto a função exponencial $f(x) = a^x$ assim como a função logarítmica $f(x) = \log_a x$ são funções crescentes. Desta forma, se representarmos os dois gráficos em um mesmo sistema de coordenadas, temos:

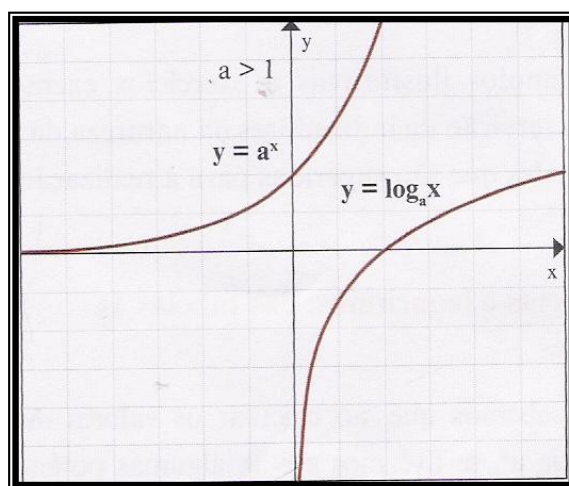


Figura 31 - Gráfico da Função Exponencial e Logarítmica no caso $a > 1$.
Fonte: São Paulo, 2009, p. 38.

No caso em que $0 < a < 1$, a função exponencial de base a será decrescente, assim como a função logarítmica também será decrescente.

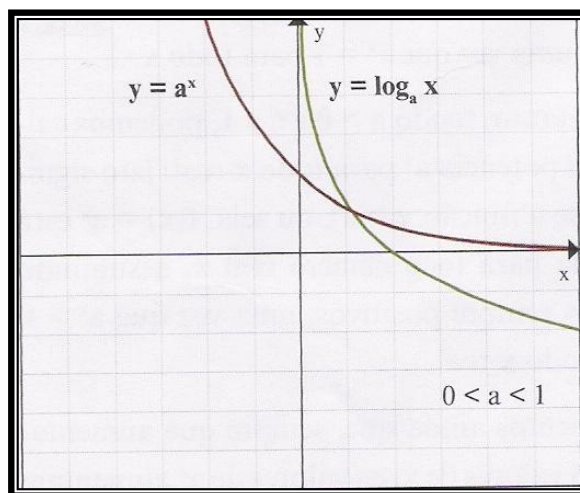


Figura 32 - Gráfico da Função Exponencial e Logarítmica, no caso em que $0 < a < 1$.
 Fonte: São Paulo, 2009, p. 38.

A estratégia utilizada para o ensino da função logarítmica abordando o registro gráfico como uma forma de representação foi por meio do conceito de função inversa. Quando temos o gráfico de $y = a^x$ e $y = \log_a x$ representados em um mesmo sistema de coordenadas, percebemos que a cada par (m, n) do primeiro gráfico, corresponde a um par (n, m) do segundo. Esses pontos são simétricos em relação à reta $y = x$, que é bissetriz dos quadrantes ímpares e assim, a cada ponto do gráfico $y = a^x$ corresponde um ponto do gráfico de $y = \log_a x$ que é simétrico ao primeiro em relação à reta $y = x$.

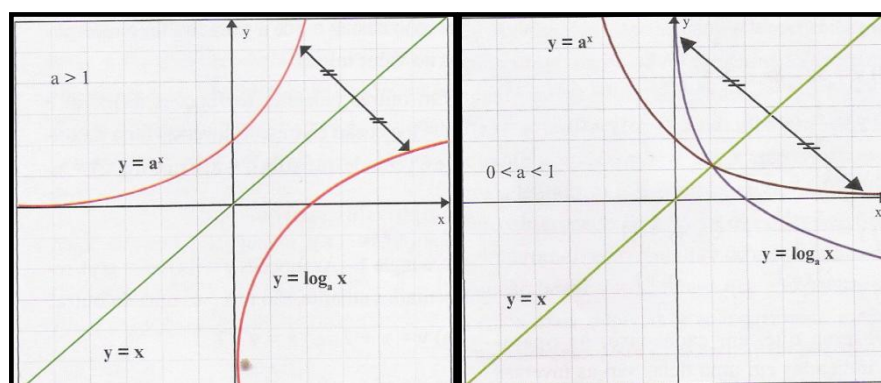


Figura 33 - Função Exponencial e a sua inversa.
 Fonte: São Paulo, 2009, p. 39.

Para explorar a função inversa, os autores propõem exemplos e exercícios envolvendo a determinação da função inversa no registro algébrico e gráfico. Para observar os padrões de crescimento/decrescimento das funções

exponencial e logarítmica que são distintos, os autores recorrem ao registro gráfico para facilitar a visualização desses padrões. Sendo $a > 1$ a função $f(x) = a^x$ cresce rapidamente, enquanto que a função $g(x) = \log_a x$ cresce cada vez mais lentamente.

Na Situação de Aprendizagem 4 intitulada “As múltiplas faces das potências e dos logaritmos: Problemas envolvendo equações e inequações em diferentes contextos”, observamos que o objetivo é apresentar aos alunos a relevância do estudo dos logaritmos para expressar e compreender fenômenos naturais.

Foram apresentadas situações-problema, a lenda do tabuleiro de xadrez, comparação entre ordem de grandezas, mudança de escala usual para a escala logarítmica, cálculo de juros, meia vida de elementos químicos.

Para a mudança de escala usual para uma escala logarítmica, são apresentados exemplos utilizando os papéis *monolog* e *dilog*¹⁸. Desta forma, o gráfico da função $y = 5^x$ será uma reta com inclinação igual ao $\log 5$, sendo as unidades do eixo y representadas pelos logaritmos de x .

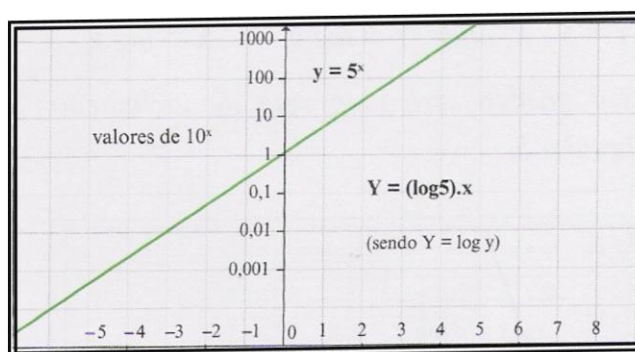


Figura 34 - Escala Logarítmica.

Fonte: São Paulo, 2009, p. 51.

Em relação ao estudo que fizemos sobre o tema funções logarítmicas, observamos que os autores que elaboraram o Caderno do Professor de Matemática, do 1º ano do Ensino Médio – volume 3 (SÃO PAULO, 2009), no que se refere a este tema, tiveram a preocupação em mostrar ao professor que o

¹⁸ Monolog é um papel em que um dos eixos é graduado em escala logarítmica e o outro é graduado em escala linear. No papel dilog os dois eixos são graduados em escalas logarítmicas.

ensino de logaritmos não se restringe apenas ao estudo de técnicas operatórias das propriedades logarítmicas, procurando exemplificar as aplicações para descrever fenômenos naturais e ressaltando a importância do estudo deste tema conforme é sugerido nos PCNEM (BRASIL, 2002).

O estudo da função logarítmica apresentada como a função inversa da função exponencial é sugerido nas OCEM (BRASIL, 2006) e encontramos esta estratégia de ensino no Caderno do Professor de Matemática do 1º ano do Ensino Médio – volume 3 (SÃO PAULO, 2009).

Ressaltamos que a coordenação entre os diferentes registros de representações, tais como registros simbólicos, algébricos, gráficos também são apresentados ao longo das quatro Situações de Aprendizagens.

Acreditamos que em relação ao tema função logarítmica, o material é um recurso para o professor utilizar durante o ensino deste tema. No entanto, o professor deve conciliar as situações-problema propostas no material e adequar a realidade de seus alunos com relação às condições de ensino e aprendizagem, tempo para o estudo deste tema e utilizar outros materiais como apoio caso haja necessidade.

Neste trabalho, procuramos adequar algumas atividades propostas do Caderno do Professor e fazer algumas alterações que achamos necessárias com o objetivo de possibilitar aos alunos uma aprendizagem por descoberta, estabelecer relações com as propriedades das potências sem mencionar tais propriedades, para que estes alunos possam concluir que o logaritmo é um expoente.

A seguir, apresentaremos o relato da entrevista que fizemos com o ex-professor dos alunos que são os sujeitos de nossa pesquisa. O objetivo é fazer um diagnóstico de quais conteúdos estes alunos estudaram ao longo do Ensino Médio.

4.2. Entrevista feita com o ex-professor dos alunos envolvidos na pesquisa

Conversamos com o professor que lecionou durante os dois anos anteriores para esses alunos a respeito de seus conhecimentos prévios. O mesmo nos disse que no final do 1º ano não foi possível trabalhar com o objeto matemático “função exponencial e logarítmica” devido às dificuldades encontradas ao trabalhar com o conceito de função com esses alunos. Essas dificuldades apontadas pelo professor e enfrentadas pelos alunos foram a localização dos pontos no sistema cartesiano ortogonal e como consequência, tornou-se difícil e demorada a construção de gráficos. Segundo o professor, o ensino foi pautado utilizando como recurso didático régua, papel quadriculado para a construção dos gráficos das funções, entretanto os alunos nunca tiveram acesso a *softwares* gráficos, pois não havia computadores acessíveis na escola.

No que diz respeito à construção de gráficos de funções, as dificuldades encontradas pelos alunos se referem ao tratamento algébrico para o preenchimento de tabelas. Os estudantes faziam substituições de forma incorreta ao atribuir os valores pré-estabelecidos do domínio da função (apenas no conjunto dos números inteiros) pelo professor na lei da função para encontrar o conjunto imagem e como consequência, muitos não conseguiam fazer a construção no registro gráfico. Operações como potenciação, divisão e as regras de sinais também foram apontadas pelo professor como obstáculos didáticos.

O ensino de função durante o ano limitou-se apenas à função afim e quadrática e problemas de máximos e mínimos. Segundo o professor, não houve trabalho com a forma canônica da função quadrática e nem estudo dos coeficientes dessas funções e a sua relação com a representação no registro gráfico. O professor ressaltou que não houve trabalho com o material de apoio disponibilizado pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (Caderno do aluno e do Professor); justificou a não utilização deste material pelo fato dos alunos não terem “requisitos e capacidades” para as atividades propostas no Caderno.

Também pedimos aos alunos que trouxessem o caderno do 1º ano para verificarmos quais conteúdos foram trabalhados com eles.

Perguntamos ao professor sobre a possibilidade de ele continuar o trabalho das funções exponenciais e logarítmicas no ano subsequente, todavia não houve

esse trabalho devido ao professor ter que dar continuidade ao conteúdo da Proposta Curricular do Estado de São Paulo para o 2º ano. Argumentou: “os alunos não iriam precisar deste conteúdo, pois teriam no 3º ano do Ensino Médio” (ex-professor da turma).

Desta forma, diante da entrevista feita pelo ex-professor da turma decidimos optar pela turma do 3º ano do Ensino Médio para a realização da pesquisa, e escolhemos atividades do Caderno do 1º ano do Ensino Médio volume 3, para iniciarmos a elaboração da sequência didática. Ressaltamos que fizemos algumas alterações que julgamos necessárias nas atividades do caderno para a construção do conhecimento da função exponencial e logarítmica.

Priorizamos as conversões entre as diferentes formas de registros de representações segundo Duval (2009), de forma que pudéssemos observar os processos do Pensamento Matemático Avançado, descritos por Dreyfus (1991).

Diante de tais fatos, construímos uma sequência iniciando por uma situação-problema abordando potências, função exponencial de acordo com o que é proposto no caderno do professor de matemática da rede estadual de São Paulo para depois ampliarmos o estudo da função logarítmica.

4.3. Análise *a priori* da sequência de atividades

4.3.1. Sessão I - Consolidação da ideia de Potências – Análise *a priori*

Objetivo: Ao propor esta atividade pretende-se iniciar uma situação-problema que envolve a exploração de alguns conceitos fundamentais das potências, tais como as diferentes formas de representação da potência utilizando números reais e relacionar com algumas propriedades fundamentais desse conteúdo, nos quais serão destacados fatos fundamentais para a compreensão da natureza da função exponencial.

Para isso utilizamos como registro de partida o registro da língua natural, o registro numérico e algébrico por meio da tabela para favorecer as conversões do registro de partida para o registro de chegada fazendo uso do registro numérico, algébrico e gráfico.

A primeira atividade que selecionamos faz parte do conjunto de atividades propostas no Caderno do Professor de Matemática, 1º Ano do Ensino Médio, 3º Volume (SÃO PAULO, 2009), elaborado pela Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo e disponibilizado aos professores no ano de 2009. Foram feitas algumas mudanças na apresentação da tabela, pois no caderno do Caderno do Professor estão inseridos todos os dados da situação-problema, enquanto que nesta atividade, disponibilizamos apenas alguns dados na coluna da Produção P em toneladas, para que os alunos observem e completem a tabela fazendo uma mudança de representação na forma de potência.

Plano de Desenvolvimento Econômico

Em razões da criação de um Plano de Desenvolvimento Econômico por meio de incentivos na redução de recolhimento de impostos, a produção de determinado alimento em um país da América do Sul, foi igual a 1 tonelada no final do ano 2000 e, após o plano de crescimento incentivado pelo setor, a produção passou a triplicar anualmente a partir daí. Conforme ilustra a tabela a seguir:

Ano (t)	Produção P (em toneladas)	Potência Correspondente
2000	1	
2001	3	
2002		
2003	27	
2004		
2005	243	
2006		
2007		
2008		
2009		
....		
2015	14 348 907	
2000 + ...		

Observe a produção P em toneladas e complete o restante da tabela.

- Podemos escrever os valores da Produção P(em toneladas) na forma de potência. Desta forma complete a tabela relacionando esses valores com a potência correspondente e justifique a sua resposta.
- Observe a regularidade dos expoentes da potência, existe alguma relação com outros valores representados nas outras colunas? Justifique sua resposta.
- Observe os dados inseridos na tabela e estabeleça uma expressão algébrica que relacione a produção de alimentos (em toneladas) em função do tempo (ano). Justifique sua resposta.
- Os valores apresentados na tabela pertencem ao conjunto dos números naturais, entretanto podemos estender para o conjunto dos números reais. No contexto da situação problema apresentada acima, o que significa calcular $P = 3^{0,5}$?
- No mesmo contexto do item (d) o que significa $3^{0,5} \cdot 3^{0,5} = 3^{0,5+0,5} = 3^1$?
- Com a ajuda de uma calculadora científica, calcule $3^{0,5}$. Qual foi o valor que você encontrou? Agora faça o mesmo com $\sqrt{3}$ e com $3^{\frac{1}{2}}$, observe e compare os resultados. O que você pode concluir?
- Usando a calculadora científica qual será o valor da produção de alimentos P (em toneladas) após 4,5 anos neste país?

Figura 35 - Situação de Aprendizagem 1 - Sessão I adaptada pela autora.

Fonte: São Paulo, 2009, p. 12.

Esperamos que os alunos ao fazerem a leitura da situação-problema e a observação dos dados organizados na tabela relacionem a grandeza tempo com a Produção P (em toneladas) de forma que haja uma relação do crescimento da produção da empresa com o passar do tempo.

Ao observarem e analisarem a coluna correspondente à produção P (em toneladas) no item (a) espera-se que os alunos possam concluir que os valores são múltiplos de 3 e conseqüentemente poderão transformar em potências de base 3.

No item (b) espera-se que os alunos possam observar e relacionar o último algarismo do ano na primeira coluna com o expoente da potência e preencher a 3ª coluna.

No item (c) espera-se que os alunos observem algum padrão de regularidade e generalizem a regularidade da multiplicação pelo fator 3 a cada ano, observando o expoente da potência e estabeleçam uma relação de dependência entre as variáveis que a produção P (em toneladas) depende de t (anos) de forma que o valor da produção será $f(p) = 3^t$ (toneladas).

No item (d) pretendemos com esta questão que os alunos façam uma relação entre os números relacionados no contexto do problema e façam uma ampliação deste contexto para o conjunto dos números reais de forma que possam compreender o que significa $P = 3^{0,5}$.

No item (e) espera-se que os alunos retornem à situação-problema, que tentem interpretar a expressão $3^{0,5}$ e consigam estimar a produção de alimento na metade de 2001, ou seja, 0,5 ao ano, após o momento em que a produção começou a triplicar ano a ano. E ainda que relacionem com a propriedade do produto de uma potência de mesma base.

Ainda no item (f), ao utilizar a calculadora, espera-se que os alunos manipulem as três representações numéricas (com expoente fracionário, decimal e na forma de um radical) do número irracional, fazendo o que Duval chama de tratamento no registro numérico para que o aluno consiga estabelecer uma relação entre as propriedades da potência de um expoente fracionário.

No item (g), espera-se que os alunos utilizem a expressão algébrica encontrada, compreenda que a variável está no expoente, e encontre o valor da produção P (em toneladas).

No item (h) (Figura 36) esperamos que os alunos façam a conversão do registro numérico representado por uma tabela para o registro gráfico da situação problema e observem o comportamento gráfico da curva da função exponencial.

No item (i) (Figura 36) espera-se que após a construção do gráfico da função, consigam encontrar a expressão algébrica representada por $P = 3^t$ em que P é representado pela Produção em função do tempo, definida por uma função exponencial.

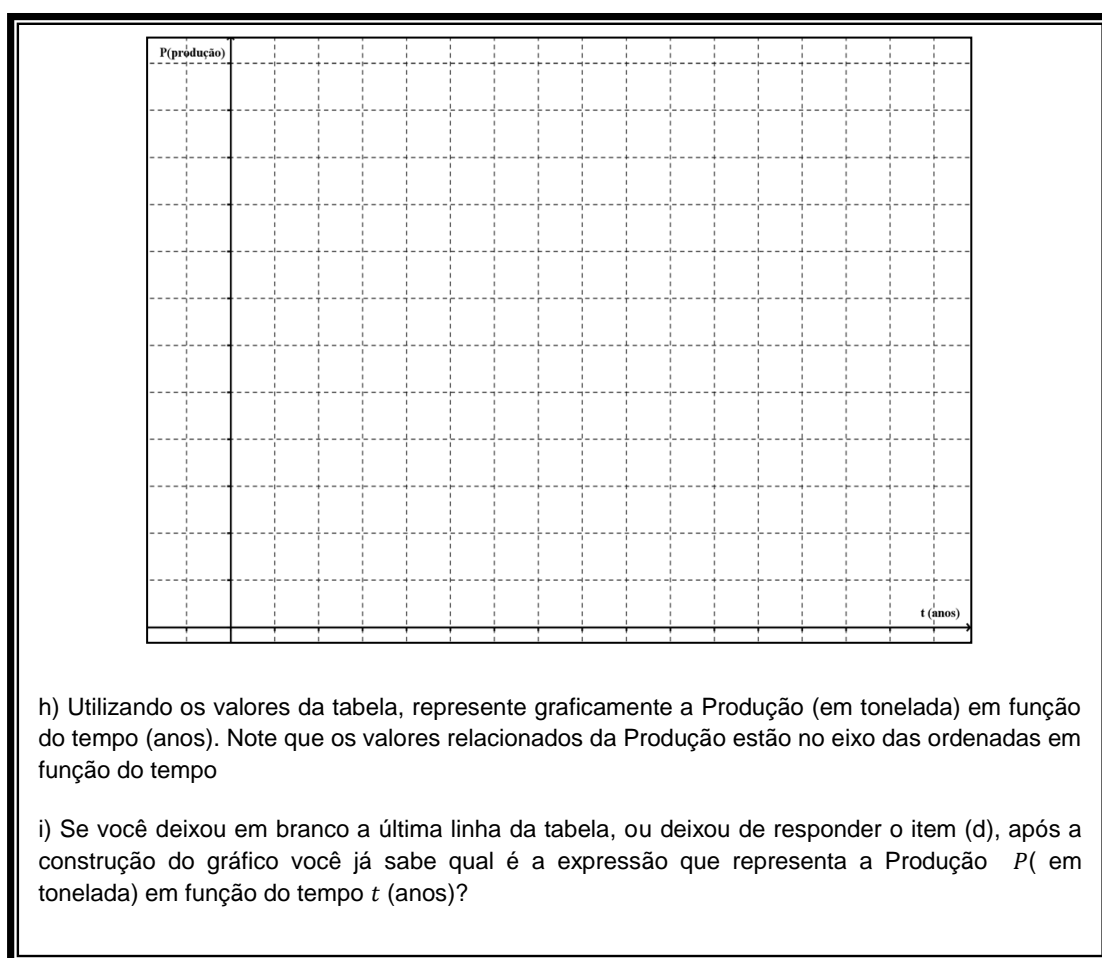


Figura 36 - Situação de Aprendizagem 1 - Sessão I e adaptada pela autora.

Fonte: São Paulo, 2009.

4.3.2. Sessão II - Explorar o conceito Função Exponencial – Análise *a priori*

Objetivo: Explorar as características da função exponencial, domínio da função representado por meio de tabelas e fazer a conversão para o registro gráfico utilizando o *software* GeoGebra; apresentar a situação-problema representada pelo registro de tabela e fazer a conversão para o registro numérico e algébrico.

Na questão 1 espera-se que os alunos utilizem os valores apresentados na primeira coluna para x e efetuem o cálculo da potência e relacionem as propriedades da potenciação com expoente negativo e expoente fracionário.

1) Observe a tabela e complete:

x	2^x	3^x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$
1				
2			$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$	
3				
0	$2^0 = 1$			
-3	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$			
$\frac{1}{2}$		$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \cong 1,73$		$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0,71$

Figura 37 - Situação de Aprendizagem 1 e adaptada pela autora.
Fonte: São Paulo, 2009, p. 14.

Na segunda questão o objetivo é explorar a função exponencial utilizando a conversão do registro numérico por meio de tabela para a representação gráfica e a partir dessa nova representação, explorar o comportamento da curva da função exponencial.

2) A partir da leitura da tabela e dos gráficos das funções f e g definida por $f(x) = a^x$ e $g(x) = b^x$, observe e responda:

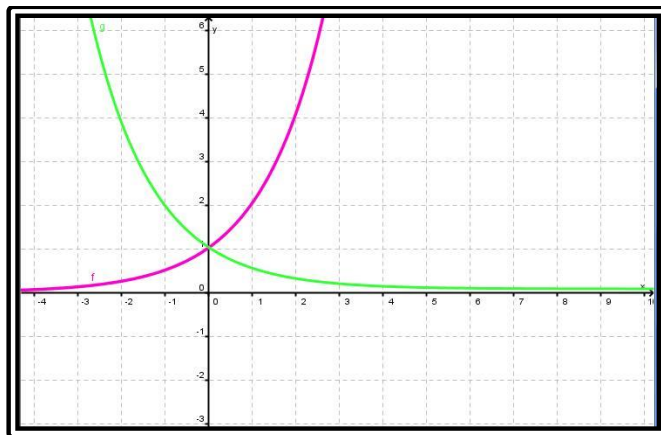


Figura 38 - Gráfico da Função Exponencial no *software* GeoGebra.
Fonte: Elaborada pela autora.

Nos itens (a) e (b) (Figura 39) espera-se que os alunos relacionem os valores encontrados na tabela com o comportamento do gráfico das funções f e g e façam a conversão do registro gráfico para o registro algébrico.

- Qual é a representação algébrica da função f ?
- Qual é a representação algébrica da função g ?
- Observando as curvas das funções f e g , qual é a característica da curva quando a base a é maior que zero?
- Construa várias funções em $0 < a < 1$ utilizando o *software* GeoGebra e observe o comportamento do gráfico dessas funções. Escreva a lei algébrica dessas funções.
- Após a resolução do item (d) você pode generalizar o comportamento do gráfico de uma função $f(x) = a^x$ se $0 < a < 1$? Justifique sua resposta.
- Qual é a diferença entre a função $f(x) = 3^{-x}$ e a função $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$? Justifique a sua resposta e, caso necessário, utilize o *software* GeoGebra para confirmar suas hipóteses.

Figura 39 - Questões sobre Funções Exponenciais – Sessão II.
Fonte: Elaborada pela autora.

No item (c) espera-se que os alunos identifiquem que uma função f definida por $f(x) = a^x$ para $a > 1$ como uma função crescente, pois quando o valor de x aumenta o valor de $y = a^x$ também aumenta.

No item (d) é solicitado que os alunos testem várias funções em que $0 < a < 1$ com a ajuda do *software* GeoGebra para que observem o comportamento do gráfico das respectivas funções e estabeleçam conjecturas sobre esse comportamento.

No item (e) espera-se que os alunos, por meio das conjecturas do item anterior, possam generalizar que sendo $0 < a < 1$, quando o valor de x aumenta, o valor de a^x diminui, ou seja, uma $f(x) = a^x$ é decrescente.

No item (f) espera-se que os alunos testem os dois tipos de representação da função f dada por $f(x) = 3^{-x}$ e g definida por $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ e concluam que são iguais, que possuem diferentes representações e relacionem com a propriedade da potência em que $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ para $a \neq 0$ chamado de inverso de a

- g) Construa as funções $y = 2^x$, $y = 4^x$, $y = 5^x$, $y = (0,5)^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = (\sqrt{2})^x$, utilizando o *software* GeoGebra e observe que essas funções interceptam no eixo y no ponto de ordenada igual a 1. Como você justifica esse fato, será que esse fato ocorre com todas as funções do tipo $f(x) = a^x$?
- h) Construa a função $y = 1^x$ utilizando o *software* GeoGebra essa função pode ser chamada de função exponencial? Justifique sua resposta.
- i) Observe o crescimento do gráfico das funções exponenciais que você construiu por meio do *software* GeoGebra, descreva o comportamento da curva, quando $a > 1$ e $0 < a < 1$.
- j) Observe as funções que você construiu por meio do *software* GeoGebra, escreva qual é o Domínio, o Conjunto Imagem e o Contradomínio de uma função exponencial.

Figura 40 - Questões sobre Funções Exponenciais – Sessão II.

Fonte: Elaborada pela autora.

No item (g) espera-se que os alunos construam várias funções exponenciais e concluam que todas as funções exponenciais passam por (0,1), pois qualquer função exponencial do tipo f definida por $f(x) = a^x$ terá $f(0) = 1$.

No item (h) espera-se que os alunos observem que a função definida por $y = 1^x$ é uma função constante e para ser uma função exponencial f definida por $f(x) = a^x$ em que $a > 1$ ou $0 < a < 1$.

No item (i) espera-se que os alunos estabeleçam uma relação entre o comportamento da função exponencial. Se $0 < a < 1$, a função é decrescente e para $a > 1$, a função é crescente.

No item (j) espera-se que após a observação dos gráficos construídos no *software* GeoGebra, os alunos sejam capazes de compreender que o domínio da função exponencial é $D(f) = \mathbb{R}$, $CD(f) = \mathbb{R}$ e a $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$.

No item (k) após a realização das atividades propostas nesta Sessão utilizando conversões entre os registros numéricos e tabela e dos registros algébrico e gráfico, espera-se que os alunos sejam capazes de conceituar uma função exponencial por meio do registro língua natural.

4.3.3. Sessão III – Explorar o conceito de Logaritmos – Análise *a priori*

Objetivo: Apresentar situações-problema que necessitam utilizar o conceito de função exponencial e logarítmica. Durante a seção, ao propor as atividades abaixo, pretendemos ressaltar a importância do estudo dos logaritmos para os alunos promovendo uma discussão sobre o tema, utilizando a calculadora científica. Para a escolha das atividades adotamos o Caderno do Professor de Matemática 2009 e procuramos subsídios à luz da Teoria dos Registros de Representação e Semiótica conforme Duval, e dos Processos do Pensamento Matemático Avançado (DREYFUS, 1991).

- 1) A população **N** de um determinado município cresce exponencialmente, desde a sua fundação há 20 anos, de acordo com a expressão $N = 3000 \cdot 10^{0,1t}$, sendo **t** em anos. Responda:
- a) O Valor de **N** quando o município foi fundado;
 - b) O valor de **N** dez anos após a fundação;
 - c) O valor de **N** nos dias atuais;
 - d) Depois de quanto tempo, após a fundação a população atingirá a marca de 3000000 habitantes, se o ritmo de crescimento continuar assim?
 - e) Depois de quanto tempo, após a fundação, o valor de N atingirá 600 000?
 - f) Você conseguiu chegar na expressão $10^{0,1t} = 200$?
 - g) Observe que $10^2 = 100$ e que $10^3 = 1000$ então deve haver um número n entre 2 e 3 tal que $10^n = 200$, usando a calculadora científica tente encontrar um valor estimado para n. (use 3 casas decimais)
 - h) Agora aperte a tecla log e depois o número 200. Qual é a sua conclusão?

Figura 41 - Exploração do Conceito de Logaritmos – Sessão III.

Fonte: Elaborada pela autora.

Os registros de partida contemplados na atividade são: registro na língua natural, numérico e algébrico.

Para os registros de chegada (língua natural e algébrico) prevemos que os alunos façam o tratamento no registro numérico e algébrico. O objetivo da atividade proposta é de iniciar o estudo do logaritmo por meio de uma função exponencial.

Os conhecimentos necessários para que os alunos consigam desenvolver os itens apresentados são: interpretação da situação-problema e reconhecer que no item (f), a expressão dada por $N = 3000 \cdot 10^{0,1t}$ é uma função exponencial, pois a variável dependente está no expoente e desta forma o crescimento poderá ser

rápido. O aluno terá que mobilizar conhecimentos sobre potenciação em especial a potência de base dez.

As possíveis dificuldades que os alunos poderão encontrar são a partir do item (e), pois é necessário que os mesmos façam uma conversão entre o registro algébrico para o numérico que pode acarretar alguns erros durante o processo de resolução da equação.

No item (f), acredita-se que haverá o início do debate sobre a definição de logaritmos, pois saber quantos anos a população atingirá 600000, devemos ter $600000 = 3000 \cdot 10^{0,1t}$, ou seja, $10^{0,1t} = 200$. É necessário saber, qual o expoente de base 10 que seria igual a 200. Nesta situação temos um tratamento no registro algébrico (no registro de partida) para o registro numérico no registro de chegada.

Acreditamos que o processo do Pensamento Matemático Avançado envolvido neste item é o levantamento de hipótese para estabelecer a seguinte conjectura: qual é o expoente da potência de 10 que seria igual a 200? Por meio do processo do que Dreyfus chama de investigação os alunos poderão fazer tentativas utilizando a calculadora científica e por meio do processo por descoberta poderão conjecturar, que o número procurado está entre 2 e 3 para se ter $10^n = 200$.

Caso este fato não aconteça, o próximo item servirá como um caminho para ajudar os alunos a encontrarem o expoente desejado. Somente após a descoberta do número tal que $10^n = 200$ em que n será aproximadamente igual a 2,301, então teremos $10^n = 10^{2,301}$. Na expressão $10^{0,1t} = 200$ podemos substituir 200 por $10^{2,301}$. Deste modo a expressão ficará: $10^{0,1t} = 10^{2,301}$ e assim teremos $0,1t = 2,301$ e então, $t = \frac{2,301}{0,1}$ e o valor de t será de aproximadamente 23 anos.

E a partir desse momento será feita uma discussão sobre a utilidade da tecla *log* da calculadora e a definição de logaritmo.

A questão a seguir foi elaborada a partir do Caderno do Professor de Matemática (SÃO PAULO, 2009, p. 21). Constam no Caderno alguns números representados na forma de potência e sua respectiva representação na forma de logaritmo. Criamos uma tabela e deixamos em branco alguns espaços para que

os alunos utilizem o processo do Pensamento Matemático Avançado de observação para possibilitar a generalização de que o logaritmo é o expoente da potência de base 10. Acreditamos que como estratégia de resolução, poderão utilizar a calculadora científica para as potências com expoentes negativos e fracionários.

2) Observe os números dispostos e complete a tabela.

N	Escrita em Potência	Escrita em Logaritmo
100	10^2	$\log 100 = 2$
1000		
10		$\log 10 =$
10^0		
	$10^{\frac{1}{2}}$	
	10^{-2}	
1		
0,1		
		$\log 10^{-3} =$
0,0004		
-10		
0		

Figura 42 - Situação de Aprendizagem II e adaptada pela autora.
Fonte: São Paulo, 2009, p. 21.

A questão foi apresentada tendo como registro de partida o registro de tabela, o que pode facilitar a observação dos dados apresentados e é esperado que os alunos relacionassem números dispostos nas três colunas. O conhecimento necessário para os alunos completarem a tabela de forma correta será o tratamento no registro numérico na forma decimal para o registro de chegada à forma de potência de base dez; os processos do Pensamento Matemático Avançado que poderão estar envolvidos serão: a mudança de representação, observação e a descoberta, e notar a relação entre os dados apresentados com o conceito de logaritmo. As dificuldades que podem ser encontradas estarão na transformação de uma potência com expoente fracionário para a forma de um radical.

3) Após ter feito as duas atividades acima, explique o que é logaritmo na base 10 e quando ele existe.

Figura 43 - Exploração do Conceito de Logaritmos.

Fonte: Elaborada pela autora.

Na terceira questão o objetivo é mobilizar os alunos a observar as atividades anteriores com seus respectivos resultados e formalizar o conceito de logaritmo na base dez, bem como a condição de existência. Poderá haver questionamentos do por que da calculadora apresentar ERRO, e essa discussão poderia ser útil para formalizar a não existência de \log de base negativa e relacionar com as propriedades das potências. Neste momento é possível haver dificuldade de escrever no registro da língua natural um conceito matemático.

4) A partir dos logaritmos de alguns números podemos obter os logaritmos de outros, efetuando cálculos com potências. Dados os valores de logaritmos de 2 e 3, podemos calcular os logaritmos dos números indicados. Se $\log 2 \cong 0,30$ (ou seja, $2 \cong 10^{0,30}$) e $\log 3 \cong 10^{0,47}$ (ou seja $3 \cong 10^{0,47}$) então calcule:

Faça $\log 6 = \log (2.3) = \log (10^{0,30} \cdot 10^{0,47}) = \log (10^{0,30 + 0,47}) = \log 10^{0,77} = 0,77$.

Analogamente calcule e confirme o resultado com sua calculadora científica:

a) $\log 9$ b) $\log 4$ c) $\log 12$ d) $\log 36$ e) $\log 18$

Figura 44 - Exploração das Propriedades dos Logaritmos.

Fonte: São Paulo, 2008 p. 24, adaptada pela autora.

A questão acima é apresentada com o registro de partida da língua natural e numérico, e é pedido que realizasse o tratamento para o registro numérico no registro de chegada. O objetivo da questão é que haja a leitura e interpretação dos dados para resolverem os itens (a), (b), (c), (d) e (e).

5) Repetindo os procedimentos realizados nos itens acima, sendo $A = 10^a$ e $B = 10^b$, então podemos escrever $\log A.B =$

6) Determine o valor dos logaritmos abaixo:

a) $A = \log_2 \frac{16}{4} =$

b) $B = \log_2 16 - \log_2 4 =$

Observe os itens (a) e (b) da questão anterior. Sendo $A = B$ e $c =$ a base do logaritmo então poderemos escrever que $A = \frac{\log_c a}{\log_c b} =$

Figura 45 - Propriedades dos logaritmos.

Fonte: Elaborada pela autora.

Nas questões (5) e (6) os alunos terão que retomar a leitura da questão 4 observando o procedimento adotado e fazer um tratamento do registro numérico (registro de partida) para o algébrico (registro de chegada) e formalizar a propriedade do produto entre dois logaritmos é igual a soma desses dois logaritmos em uma mesma base. A segunda propriedade a ser generalizada é que em uma mesma base, o logaritmo do quociente de dois números positivos é igual à diferença entre os logaritmos desses números. Os processos do Pensamento Matemático Avançado envolvido nas questões (5) e (6) são os processos de observação, mudança de representação (numérica para a algébrica) para generalizar as propriedades dos logaritmos. É possível que os alunos façam uma relação com as propriedades das potências estudadas no Ensino Fundamental.

As possíveis dificuldades que poderiam aparecer na interpretação do enunciado e no tratamento do registro numérico para o registro algébrico para fazer uma generalização dessas propriedades.

7) Dada a expressão $M = \log_2 7^3$ escreva:

- a) Um produto de logaritmos em fatores iguais.
- b) Agora, transforme o produto encontrado na questão anterior em soma de 3 parcelas. Chamando de N a expressão que você encontrou
- c) Podemos dizer que $N = M$?
- d) Observe os itens (a), (b) e (c) então podemos escrever que se o $\log_a M^N = \underline{\hspace{2cm}}$

Figura 46 - Propriedade do logaritmo de uma Potência

Fonte: Dante, 2005, e adaptada pela autora.

Na sétima questão os alunos poderão relacionar e comparar (processos do Pensamento Matemático Avançado) os resultados obtidos nos itens (a), (b), (c) e (d), fazer um tratamento do registro algébrico para chegar por meio do processo de observação, e generalização, e concluir que a propriedade do logaritmo de uma potência de base positiva é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base de potência $\log_a M^N = N \cdot \log_a M$, sendo que $a < 0$ e $a \neq 1$, M são números positivos e N para qualquer número real e estes logaritmos devem estar em uma mesma base.

Acreditamos que nesta atividade os alunos irão relacionar com as propriedades das potências de mesma base estudadas no Ensino Fundamental.

8) Complete a tabela:

Equação na forma Exponencial	Equação na forma Logarítmica	Cálculo do Logaritmo
$2^x = 8$		$x = 3$
$5^x = 125$		$x =$
$10^x = 30$	$\log_{10} 30 = x$ ou $\log 30 = x$	$x =$
$2^x = 32$		$x =$
$3^x = 243$		$x =$
$10^x = 50$		$x =$
$10^x = 0,98$		$x =$
$10^x = 950$		$x =$
$10^x = 15000$		$x =$

Figura 47 - Relação entre a equação exponencial e logarítmica.

Fonte: Lima, 2009 p.169.

Na oitava questão a atividade é apresentada por meio do registro de tabela, relacionando a equação exponencial, usando a definição de logaritmo para que os alunos observem que a equação na forma logarítmica é o processo inverso da equação exponencial. Os conhecimentos necessários para chegar à sua resolução serão os conceitos de potenciação e fatoração.

A atividade é proposta do registro de partida no registro de tabela para o registro de chegada (registro numérico). Os processos do Pensamento Matemático Avançado, envolvidos na atividade são: observação, mudança de representação (exponencial e logarítmica), generalização e abstração. Talvez, a partir desta atividade os alunos possam entender o conceito de logaritmo.

Acreditamos que os alunos não apresentarão dificuldades ao resolver esta questão.

9) A população de certa região A cresce exponencialmente de acordo com a expressão $N_A = 6000 \cdot 10^{0,1t}$ (t em anos). Em outra região B, verifica-se que o crescimento da população ocorre de acordo com a fórmula $N_B = 600 \cdot 10^{0,2t}$ (t em anos). De acordo com esses modelos de crescimento, responda às questões a seguir:

- a) Qual é a população inicial de cada uma das regiões?
- b) Depois de quantos anos, a partir do instante inicial, as duas regiões terão a mesma população?
- c) Qual é a população de cada uma das regiões 15 anos após o instante inicial?

Dado $10^{\frac{3}{2}} \cong 31,62$.

Figura 48 - Situação-problema envolvendo Logaritmos – Sessão III.
Fonte: São Paulo, 2009, p. 24.

A questão acima é apresentada no registro de partida (registro da língua natural e algébrico), para que os alunos façam o tratamento no registro numérico no registro chegada. A interpretação da situação-problema no registro da língua natural envolvendo potências e logaritmos é o foco principal. Será necessário fazer uma análise do crescimento das duas cidades A e B segundo os modelos

apresentados algebricamente. Os conhecimentos necessários são: as propriedades de potenciação, aplicação da propriedade do quociente de uma potência de mesma base no item (b). A possível dificuldade que pode ocorrer é na manipulação dos dados apresentados, tais como multiplicar 6.000 por $10^{1,5}$ sem resolver primeiro a potência. Os processos do Pensamento Matemático Avançado, envolvidos são: mudanças de representação, interpretação e abstração.

4.3.4. Sessão IV – Funções Inversas – Análise *a priori*

Objetivos: Explorar por meio do registro de partida utilizando a representação no registro gráfico os conceitos de simetria, e da função inversa e concluir que a função logarítmica é a função inversa da função exponencial.

1) Observe os gráficos das funções definidas por f e g representadas no sistema de eixo cartesiano ortogonal:

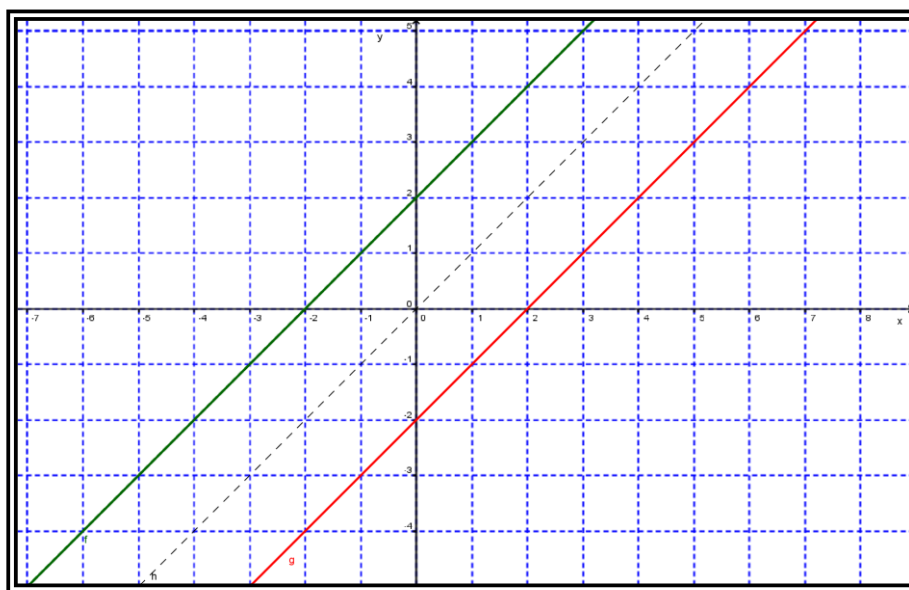


Figura 49 – Representação no registro gráfico das Funções Afim.

Fonte: Questão elaborada pela autora utilizando o *software* GeoGebra.

a) Escreva as coordenadas dos alguns pontos da função definida por f :

x	$y = f(x)$

Figura 50 - Tabela de Coordenadas da função definida por f .

Fonte: Tabela elaborada pela autora.

b) Escreva as coordenadas de alguns pontos da função definida por g :

x	$y = g(x)$

Figura 51 - Tabela de Coordenadas da função definida por g .

Fonte: Elaborada pela autora.

c) Observe e compare os valores das coordenadas dos pontos das funções definidas por f e g respectivamente. Quais são as suas conclusões?

d) A função que está pontilhada no gráfico é definida por $y = x$. A partir desta função, quais são as respectivas expressões algébricas das funções f e g ?

e) Se (a, b) pertence ao gráfico de f , então (b, a) pertence ao gráfico f^{-1} (notação de função inversa). Essa afirmação é válida para as funções f e g apresentadas no gráfico?

f) O que você entende por esta afirmação: “A reta $y = x$ é chamada de bissetriz dos quadrantes ímpares, e os gráficos das funções f e g são simétricos em relação ao eixo à reta $y = x$ ”. Podemos dizer que as duas funções f e g são inversas?

A primeira atividade é apresentada por meio do registro gráfico, registro da língua natural e registro algébrico. O objetivo da atividade é possibilitar aos alunos a oportunidade de observar o comportamento da função afim, para depois ampliar para a função exponencial e logarítmica. Pretende-se também nesta questão explorar a função inversa por meio do registro gráfico. Os conhecimentos que podem ser mobilizados por meio desta atividade são: representação de pontos formado por pares ordenados no sistema cartesiano ortogonal e organizá-los por meio de uma tabela. A dificuldade que poderia surgir é a conversão do registro gráfico para o algébrico para definir expressões algébricas das funções $f(x) = x + 2$ e $g(x) = x - 2$, porque não sabemos se o estudo da translação foi trabalhado em séries anteriores em uma abordagem funcional.

2) a) Construa o gráfico da função f definida por $f(x) = \log_2 x$ utilizando o *software* GeoGebra e escreva na tabela abaixo algumas coordenadas de pontos que pertencem à função f na tabela abaixo:

x	$y = f(x)$

Figura 52 - Tabela de coordenadas de ponto da função definida por f .
Fonte: Elaborada pela autora.

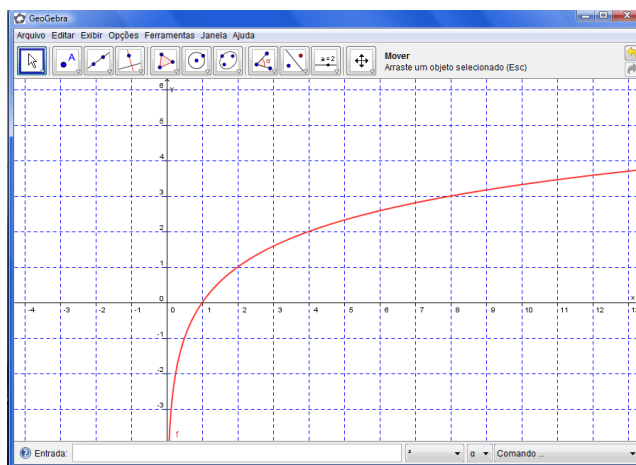


Figura 53 – Representação da função logarítmica no registro gráfico.
Fonte: Elaborada pela autora.

b) Construa o gráfico da função g definida por $g(x) = 2^x$ utilizando o *software* GeoGebra e escreva as coordenadas de alguns pontos que pertencem à função g na tabela abaixo:

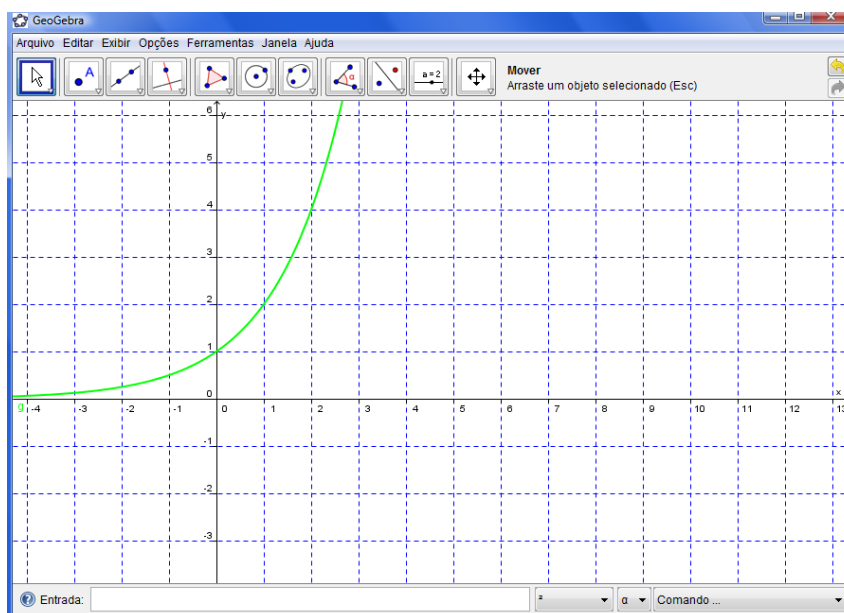


Figura 54 - Representação da função exponencial no registro gráfico.
Fonte: Elaborada pela autora.

g	$y = g(x)$

Figura 55 - Tabela de coordenadas de pontos da função g .
Fonte: Elaborada pela autora.

c) Analise os gráficos definidos pelas funções f e g construídos com o *software* GeoGebra e as coordenadas dos pontos que você preencheu nas tabelas. Podemos dizer que as duas funções são inversas? Justifique a sua resposta.

d) Com o auxílio do *software* GeoGebra, construa outros gráficos de funções exponenciais e logarítmicas de mesma base e verifique se estas funções são inversas.

O objetivo da questão é que os alunos possam observar o comportamento das duas funções e conjecturar que a função logarítmica é a função inversa da função exponencial. Esperamos que os alunos façam uma relação com a primeira questão para confirmar essas conjecturas. Os processos do Pensamento Matemático Avançado envolvido nesta questão são: mudança e alternância de representação, observação das coordenadas dos pontos que pertencem às funções f e g e a generalização. A atividade é apresentada apenas no registro gráfico. Acreditamos que não haverá dificuldades nesta questão.

4.4. Descrição e aplicação da Sequência

A aplicação da sequência foi realizada durante o mês de maio de 2010, em uma escola pública da rede estadual de São Paulo no município de Itaquaquecetuba.

Pedimos a autorização da equipe gestora da escola (direção e coordenação) para a realização desta pesquisa, que o fizeram prontamente. E ressaltaram que haveria disponibilidade de qualquer material didático que precisássemos.

Convidamos os alunos do 3º Ano do Ensino Médio para participar da pesquisa fora do horário de aula. O único critério que utilizamos para a escolha é que os participantes teriam que ter o horário da tarde disponível para a realização das atividades.

Ressaltamos que os alunos participantes da pesquisa são alunos da professora-pesquisadora no período noturno.

Participaram 6 alunos do 3º Ano do Ensino Médio durante 8 encontros com a duração de aproximadamente 2 horas para a realização das 4 sessões. Os alunos se organizaram em dupla e serão chamados: D1, D2 e D3.

Os alunos que se voluntariaram para participar da pesquisa foram alunos de salas diferentes, pois na escola temos 4 turmas de 3º Ano do Ensino Médio em cada turma temos em média de 47 alunos frequentes. Não sabíamos se esses alunos eram bons alunos no que se refere ao conhecimento matemático e desconhecíamos suas dificuldades em Matemática.

As sessões foram realizadas em um laboratório denominado pela Secretaria da Educação como projeto “Acessa Escola” que funciona como uma

espécie de *lan house* e possui 27 computadores para os alunos que não têm acesso à internet em suas residências. Nesta sala são disponibilizados alunos estagiários para a manutenção do uso controlado dos computadores.

Relatamos aos alunos que as atividades que seriam desenvolvidas eram parte da nossa pesquisa de mestrado e nosso objetivo era analisar o processo de aprendizagem deles.

Orientamos os participantes para fazer a leitura das atividades com muita atenção e calma sem se preocupar com os possíveis erros e acertos. Os alunos somente poderiam fazer perguntas à professora depois de várias leituras e discussões entre a dupla. Ressaltamos que as atividades não fariam parte das avaliações do bimestre, porém deixamos claro que era uma oportunidade a mais de aprendizagem para eles.

Salientamos que as atividades seriam entregues às duplas e pedimos para que em todas as sessões permanecessem sempre com a mesma dupla.

Ressaltamos a importância da frequência durante os encontros para não prejudicar o andamento das atividades.

Propusemos aos participantes da pesquisa para organizarem-se em duplas para proporcionar discussões sobre as atividades.

Disponibilizamos as atividades impressas, folhas em branco para rascunhos, uma calculadora para cada dupla, e solicitamos para que evitassem o uso da borracha e lápis, pois queríamos analisar o processo de resolução das atividades e não somente o resultado. Também solicitamos a autorização dos responsáveis legais dos alunos para participar da pesquisa e para gravar em áudio os diálogos das duplas durante as sessões. Nenhum participante fez objeção do uso das gravações.

Os alunos já utilizavam a calculadora científica durante as aulas de Matemática, mas até o momento da aplicação, só conheciam as funções básicas de uma calculadora comum.

Para familiarização do *software*, na segunda Sessão mostramos algumas funções na tela do GeoGebra e deixamos cerca de 15 minutos para os alunos explorarem o *software*.

Tivemos problemas durante a aplicação das atividades, pois não poderíamos instalar nas máquinas o *software* GeoGebra porque os computadores reiniciavam a cada meia hora, o que dificultou o nosso trabalho, pois tínhamos

que instalar o *software* GeoGebra a cada meia hora. Mandamos ofício para o setor responsável para a instalação do *software* GeoGebra, mas como até o momento da aplicação não obtivemos resposta, então usamos CD (*Compact Disk*) para a instalação do *software* a cada meia hora.

Em uma sala de aula regularmente os alunos ao disponibilizarmos atividades impressas, fazem perguntas como “o que é para fazer?”, sem ao menos ler o enunciado das questões. Durante as sessões observamos que este fato não aconteceu. Somente após muitas discussões e tentativas é que os alunos pediram a ajuda da professora. Quando era solicitada a nossa ajuda, procuramos fazer outras questões sem induzir à resposta, pois para nós o processo de investigação e descoberta é importante para a consolidação da aprendizagem. Percebemos a responsabilidade dos alunos para resolver as questões e durante os encontros, nenhum aluno ausentou-se.

A seguir, faremos a análise *a posteriori* dos resultados das atividades desenvolvida pelos alunos.

4.5. Análise *a posteriori*

Apresentaremos a seguir as análises dos resultados das duplas D1, D2, D3 para cada uma das atividades propostas. Os recursos que utilizamos para ajudar-nos a realizar esses resultados foram: protocolos e rascunhos dos alunos e a transcrição das gravações em áudio realizadas durante a aplicação. Faremos algumas transcrições dos diálogos entre as duplas que julgamos ser importantes.

As análises serão feitas à luz da Teoria dos Registros de Representação e Semiótica (DUVAL, 2009) e verificar quais processos do Pensamento Matemático Avançado estiveram presentes nos diálogos e protocolos das duplas. As análises dos resultados *a posteriori* serão confrontadas com a análise *a priori* segundo a metodologia da Engenharia Didática.

4.5.1. Análise *a posteriori* da Sessão I

4.5.1.1. Análise dos Protocolos da dupla D1

Observamos durante a aplicação da sequência que a dupla D1 utilizou como estratégia de resolução uma relação com o conteúdo de Sequência Numérica estudada no 1º ano do Ensino Médio.

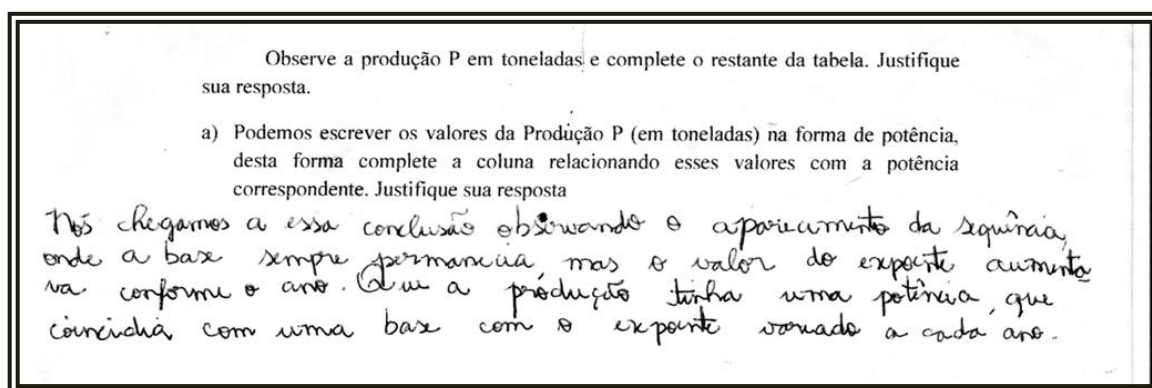


Figura 56 - Protocolo da dupla D1 - Sessão I.

Transcrição do diálogo entre a dupla D1:

Aluno R: Relacionando os valores na forma de Potência?

Aluna F: Ah, tem que fazer uma relação da coluna 2 e transformar em Potência, mas como vamos justificar como chegamos na resposta? E como vamos escrever como percebemos que o que mudava era o expoente e não a base?

Aluno R: Mas cuidado com o que você vai escrever. Se colocarmos que os valores foram triplicando, vai dar a entender que sempre foi multiplicando por 3 e não foi isso, a quantidade 3 permanecia e o que foi mudando foi o expoente.

Observamos no diálogo da dupla D1, o processo do Pensamento Matemático Avançado descrito por Dreyfus, de mudança de representação, ao transformarem a coluna 2 Produção em toneladas pela potência correspondente na coluna 1. Após fazer diversas multiplicações pelo fator três perceberam que a variação estava relacionada com o expoente e não com a base na qual podemos perceber o processo de generalização. A mudança de representação favoreceu este processo do Pensamento Matemático Avançado porque partiram de um caso particular e chegaram a um caso geral.

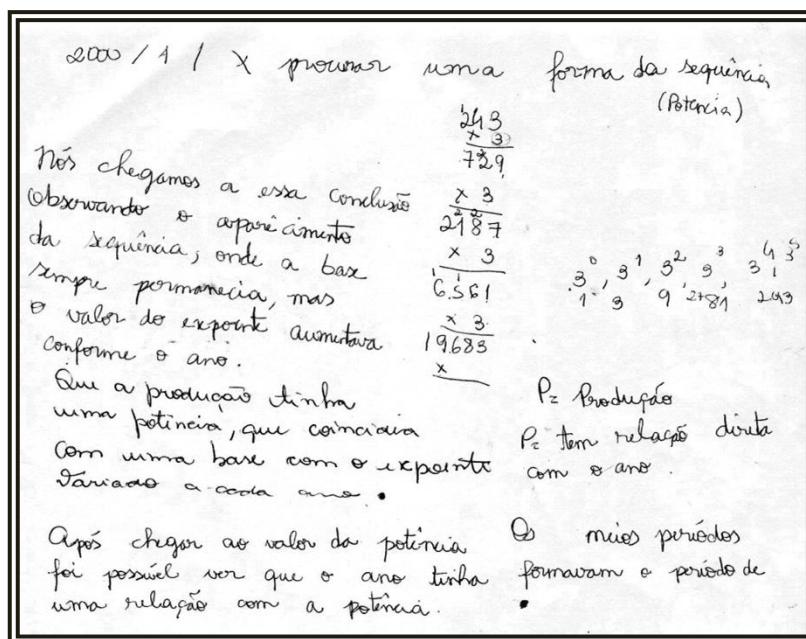


Figura 57 - Protocolo da dupla D1 - Rascunho – Sessão I.

Não previmos em nossa análise *a priori* que alguma dupla utilizasse como estratégia para resolução da atividade os conteúdos de Sequência Numérica e Progressão Geométrica que eles estudaram no 1º ano do Ensino Médio para solucionar a situação-problema.

A dupla D1 justificou no item (b) que “após chegar ao valor da potência foi possível ver que o ano tinha uma relação com a potência. Por exemplo, no ano de 2000 a potência era 0, o que prova que há uma relação entre ambos”. Não ficou claro se nessa justificativa ficou explícito que esta relação estava entre o último algarismo do ano e o expoente da potência, como previmos em nossa análise *a priori*. Observamos que houve dificuldade da dupla em se expressar no registro da língua natural, pois ao ouvirmos as gravações feitas em áudio percebemos que a dupla, ao discutir entre si, conseguiu estabelecer esta relação.

b) Observe a regularidade dos expoentes da potência, existe alguma relação com outros valores apresentados nas outras colunas? Justifique sua resposta.

Após chegar ao valor da potência foi possível ver que o ano tinha uma relação com a potência. Por exemplo no ano 2000 a potência era 0! O que prova que há uma relação entre ambos.

c) Observe os dados inseridos na tabela e estabeleça uma expressão algébrica que relacione a produção de alimentos (em toneladas) em função do tempo (ano). Justifique sua resposta. 3^x . Que o "x" pode ser substituído por qualquer valor, e foi substituindo o valor correspondente ao ano.

d) Os valores apresentados na tabela pertencem ao conjunto dos números naturais, entretanto podemos estender para o conjunto dos números reais. No contexto da situação problema apresentada acima, o que significa calcular $P = 3^{0.5}$?

Que $3^{0.5}$ equivale a meio período (ano), que o valor que representa o tempo tem uma relação ao ano.

e) No mesmo contexto do item (d) o que significa $3^{0.5} \cdot 3^{0.5} = 3^{0.5+0.5} = 3^1$?

Observamos que $\frac{1}{2}$ período com $\frac{1}{2}$ período formam-se a produção de um ano inteiro.

f) Com a ajuda de uma calculadora científica, calcule $3^{0.5}$. Qual valor você encontrou? $\approx 1,7$

Agora faça o mesmo com $\sqrt{3}$ e com $3^{\frac{1}{2}}$ observe e compare os resultados e o que você pode concluir? $1,7$ e $1,7$

Independente da representação todos tiveram o mesmo valor.

g) Usando a calculadora científica qual será o valor da produção de alimentos P (em toneladas) após 4,5 anos neste país?

~~(40,50)~~ $3^{4,5} = 140,29$

Figura 58 - Protocolo da dupla D1 - Sessão I.

Ao verificar os registros no protocolo da dupla D1 e confrontarmos os resultados com nossa análise *a priori*, percebemos que a dupla interpretou a situação-problema, observou os dados da tabela e fez relação entre a grandeza tempo com a Produção P (em toneladas), como justificou no item (b) (Figura 58).

A atividade 1 foi apresentada no registro de partida por meio do registro em língua natural, registro numérico e registro em tabela. Percebemos no item (c) que a dupla D1 fez a conversão para o registro de chegada usando o registro algébrico, além de estabelecer a relação de interdependência entre as grandezas Tempo e Produção, ressaltamos que o processo de generalização e abstração do Pensamento Matemático Avançado está presente na justificativa feita pela dupla D1.

Observamos dificuldades nos itens (d) e (e), pois a dupla não entendeu o enunciado, e pedimos para que fizesse a leitura novamente da situação-problema. A questão suscitou algumas discussões que apresentaremos a seguir:

Aluno R: *Não entendi o que significa o número 0,5 no contexto do problema.*

Aluna F: *Equivale a metade de um ano.*

Aluno R: *$\frac{1}{2}$ período ou $\frac{1}{2}$ ano?*

Aluna F: *Então... O valor de 30,5 significa que vai reduzir a metade da produção em que se teria em 31, ou seja, o resultado dividiríamos por 2.*

Não houve entre o diálogo das duplas a relação com a propriedade do produto de uma potência de mesma base como prevíamos em nossa análise *a priori*.

Houve a coordenação entre as diferentes formas de representar o número irracional $3^{0,5}$, $3^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{3}$. O processo do Pensamento Matemático Avançado envolvido neste item foi a mudança de representação de um mesmo conceito. Segundo Duval (2009), essas diferentes representações no registro numérico de forma articulada podem ajudar na compreensão da aprendizagem de um conceito. A dupla concluiu que independente das representações, os resultados são iguais, e comentou que nunca haviam parado para pensar sobre as diferentes formas que um número pode ter. Esse comentário nos levou a crer que a dupla pode ter abstraído o conceito de número irracional. Nossa intervenção neste momento foi de dar um auxílio no uso da calculadora científica. No item (g) não houve dúvidas, no registro de partida foi apresentado no registro da língua natural, a dupla converteu para o registro algébrico e numérico no registro de chegada e utilizou a calculadora científica para encontrar o resultado.

No próximo item conforme nossa análise *a priori* a dupla, o registro de partida foi apresentado no registro de tabela e fizeram a conversão para o registro gráfico. O fato da dupla D1 ter mudado a escala do gráfico no eixo das ordenadas fez com que a aparência do gráfico não ficasse na forma usual, ou seja, representado por uma curva. Questionamos a dupla D1 sobre quais tipos de funções eles conheciam, e foram enfáticos em dizer “apenas as funções que são representadas por retas e parábolas, aquela que parece um U” (dupla D1)

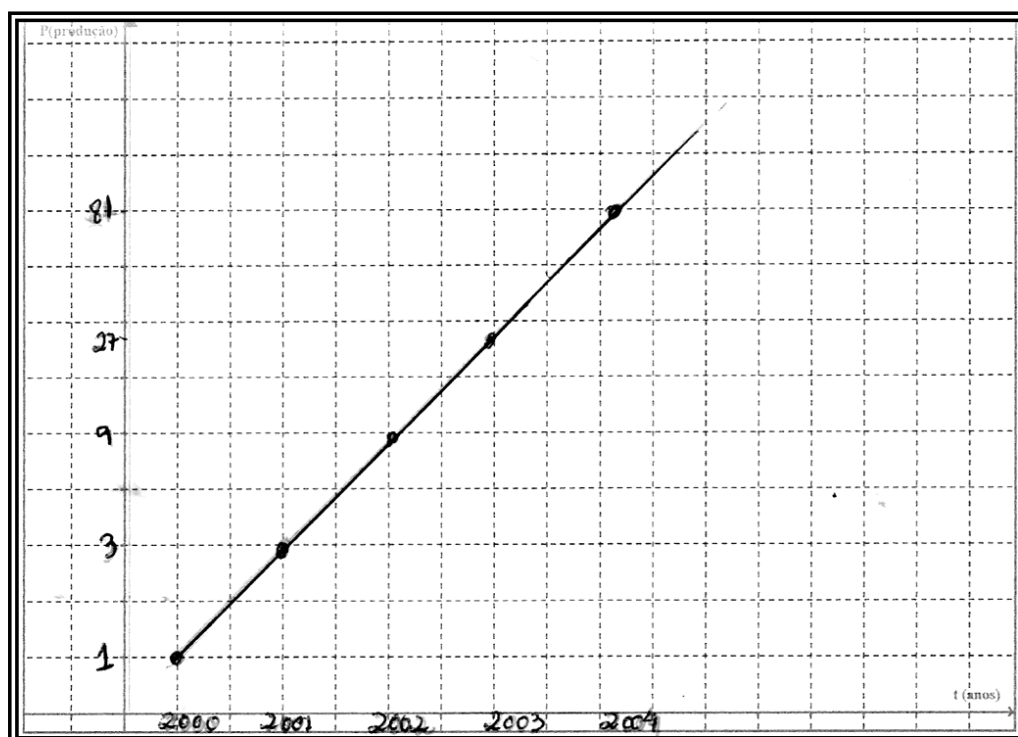


Figura 59- Protocolo da dupla D1 – Sessão I.

Percebemos uma relação entre as dificuldades encontradas por essa turma e as nossas leituras durante a revisão da literatura acerca da ênfase do trabalho com funções afim e quadrática, conforme Ardenghi (2008), Bianchini e Puga (2006) constatou em seu trabalho de pesquisa.

De modo geral, acreditamos que o nosso objetivo foi parcialmente atingido durante a realização desta atividade com esta dupla, pois não houve menção pela dupla D1 sobre a relação das propriedades das potências com a atividade proposta por nós. Acreditamos na importância de os alunos compreenderem o conceito de variável por uma abordagem funcional e compreender o conceito de função. Então ficou claro para nós que a dupla conseguiu perceber que a variação estava no expoente da potência, fato importante para a compreensão do conceito de Função Exponencial, que será objeto de estudo na nossa próxima Sessão.

4.5.1.2. Análise dos Protocolos da dupla D2

Ao ouvir as discussões gravadas em áudio pela dupla D2 percebemos que a mesma utilizou como estratégia inicial o algoritmo da divisão e fez $\frac{243}{3} = \frac{81}{3} = \frac{27}{3} = \frac{9}{3} = \frac{3}{3} = 1$, contou a quantidade de vezes que repetiu o número 3 e deduziu que deveria ser 3^5 .

Relataremos parte do diálogo feito pela dupla D2:

Aluna F: *Tem que elevar o 3 a um valor que dá 3.*

Aluna H: *Só pode ser $3^1 = 3$.*

Aluna H: *Tenta 5×5 ; 8×8 (na calculadora).*

Aluna F: *Não pode ser! Os resultados passaram longe...*

Aluna H: *Já sei! A base é 3, o número que elevado a 3 será igual a 1 é 3^1 .*

Aluna F: *Que número que coloca no expoente e o resultado será 1?*

Aluna H: *Ai não sei, vamos preencher a tabela para ver.*

Percebemos que a dupla D2 somente visualizou a variação do expoente, após o preenchimento da tabela. Como previmos em nossa análise *a priori* essa dupla D2 teve dificuldade em transformar o número 1 em base 3, observamos que inicialmente escreveram 1^3 e depois riscaram e escreveram 3^0 . A dupla D2 fez um comentário da relação do último algarismo do ano terminar em 0, então o único número no expoente é zero disse a aluna H.

A aluna F disse: “...aff que burrice, toda professora de matemática sempre diz: ‘Todo número elevado a zero é sempre 1’ e nos matando para responder uma conta tão fácil”.

A aluna H disse: - Então a potência correspondente será 3^0 , 3^1 , 3^2 , 3^3 , 3^4 , 3^5 , ..., 3^{15} e etc.

A aluna F chamou a professora e disse: - Professora eu não entendi o item (c).

A Professora respondeu: - Observem os resultados que vocês fizeram o que está mudando?

A aluna F respondeu: - O expoente! Ah, professora então o valor do expoente equivale aos anos na primeira coluna.

Plano de Desenvolvimento Econômico

Em razão da criação de um Plano de Desenvolvimento Econômico por meio de incentivos na redução de recolhimento de impostos, a produção de determinado alimento em um país da América do Sul, foi igual a 1 tonelada no final do ano 2000 e, após o plano de crescimento incentivado pelo setor, a produção passou a triplicar anualmente a partir daí. Conforme ilustra a tabela a seguir:

Ano (t)	Produção P (em toneladas)	Potência Correspondente
2000	1	3^0
2001	3	3^1
2002	9	3^2
2003	27	3^3
2004	81	3^4
2005	243	3^5
2006	729	3^6
2007	2187	3^7
2008	6561	3^8
2009	19683	3^9
....		
2015	14 348 907	3^{15}
2000 + ...		3^x

Tabela 1 Situação de Aprendizagem 1 registrada do Caderno do Professor de Matemática e adaptada pela autora. Fonte: São Paulo, 2009, p.12

Observe a produção P em toneladas e complete o restante da tabela. Justifique sua resposta.

a) Podemos escrever os valores da Produção P (em toneladas) na forma de potência, desta forma complete a coluna relacionando esses valores com a potência correspondente. Justifique sua resposta

Porque a nossa potência é 3 elevada a mais uma ano, como 1 o expoente partir do outro ano é 2 o expoente porque é o 2 ano de produção.

Figura 60 - Protocolo da dupla D2 – Sessão I.

Por meio dos diálogos entre a dupla D2 e seus protocolos percebemos a dificuldade em fazer a conversão do registro de partida no registro da língua natural para o registro numérico e algébrico no registro de chegada. Observamos que a dupla fez a leitura dos itens por várias vezes, e utilizaram a calculadora como um meio de verificar suas conjecturas. Os processos do Pensamento Matemático Avançado envolvido nas estratégias de resoluções foram: testar

hipóteses, elaborar conjecturas, mudanças de representação e visualização, pois somente após a terceira coluna estar toda completa, a dupla visualizou a variação do expoente e a relação entre o último algarismo do ano com o expoente. Dreyfus argumenta que a visualização possui um papel fundamental para facilitar a compreensão de um conceito matemático por meio de processos mentais. Não sabemos se a dupla D2 entendeu a relação entre a variação das duas grandezas, mas observamos que somente após a visualização, a dupla D2 obteve êxito no preenchimento completo da tabela.

No item (b) percebemos uma contradição com suas discussões, pois justificaram que não houve relação com os outros valores apresentados na tabela. Acreditamos que este fato consiste na dificuldade de interpretar o enunciado e representar por meio do registro da língua natural o que foi discutido durante os diálogos. Uma das alunas disse: “Professora, como é difícil colocar no papel o que entendemos, em especial a matemática”.

Acreditamos que esse fato ocorre, pois em nossas aulas, sempre priorizamos os tratamentos algébricos e numéricos e não enfatizamos a conversão do registro algébrico (no registro de partida) para o registro da língua natural (no registro de chegada) e também não temos o hábito de possibilitar aos alunos momentos de discussões sobre a Matemática durante as aulas.

No item (c) a dupla D2 fez a conversão para o registro algébrico no registro de chegada, e os processos do Pensamento Matemático Avançado envolvido foram a generalização e a abstração.

b) Observe a regularidade dos expoentes da potência, existe alguma relação com outros valores apresentados nas outras colunas? Justifique sua resposta.

não porque os valores vão mudando anualmente

c) Observe os dados inseridos na tabela e estabeleça uma expressão algébrica que relacione a produção de alimentos (em toneladas) em função do tempo (ano). Justifique sua resposta.

3^x em algébrica relacionando ano e produção

d) Os valores apresentados na tabela pertencem ao conjunto dos números naturais, entretanto podemos estender para o conjunto dos números reais. No contexto da situação problema apresentada acima, o que significa calcular $P = 3^{0,5}$?

Este problema quer saber o quanto de tonelada foi produzida até o meio do ano e o valor é de 1.732 toneladas.

e) No mesmo contexto do item (d) o que significa $3^{0,5} \cdot 3^{0,5} = 3^{0,5+0,5} = 3^1$?

Significa que esta situação representa que ele quer saber o que ele produziu o ano inteiro

f) Com a ajuda de uma calculadora científica, calcule $3^{0,5}$. Qual valor você encontrou? Agora faça o mesmo com $\sqrt{3}$ e com $3^{\frac{1}{2}}$ observe e compare os resultados e o que você pode concluir?

Que o valor $\sqrt{3}$ e $3^{\frac{1}{2}}$ pode ser fórmula diferente mas chegam ao mesmo resultado.

g) Usando a calculadora científica qual será o valor da produção de alimentos P (em toneladas) após 4,5 anos neste país?

Será de 140.296 toneladas.

Figura 61 - Protocolo da dupla D2 - Sessão I.

Os demais itens da atividade foram respondidos sem maiores dificuldades. Observamos que a dupla D2 percebeu o significado de elevar um número decimal no expoente, e perceberam que no contexto da situação-problema, a soma dos expoentes estava relacionada com a quantidade produzida durante o ano todo. No item (f) podemos observar que o processo do Pensamento Matemático Avançado envolvido foi a alternância entre as representações do número irracional. A dupla D2 concluiu que a forma da escrita não irá alterar o resultado, mas diferente da dupla D1, não fez reflexão dessas mudanças de representação para outros números e não relacionou com as propriedades das potências como prevíamos em nossa análise *a priori*.



Figura 62 - Protocolo da dupla D2 – Sessão I.

Pelo esboço do gráfico da função feito pela dupla D2, observamos que tiveram o cuidado com a escala, o que dificultou o traçado de uma reta, mas inicialmente a função teria que interceptar o eixo y , quando $y = 1$; acreditamos que a dupla D2 não percebeu que primeira coordenada do ponto, de acordo com a situação-problema seria (2000, 0) e não (2000,1). E essa confusão deve ter sido feita pelo fato da dupla não ter representado todos os valores na forma de potência, o que facilitaria a visualização da curva. Para um primeiro contato com esse tipo de função, acreditamos que houve a conversão do registro algébrico para o registro gráfico, mas temos consciência da necessidade de trabalharmos com mais funções com comportamento gráfico semelhante para perceber se a conversão facilitou a compreensão do objeto matemático.

A dupla D2 teve dificuldade no início da atividade, mas percebemos que depois de concluído que a variação estava no expoente, as demais questões foram respondidas satisfatoriamente.

4.5.1.3. Análise dos Protocolos da dupla D3

Observamos por meio do protocolo da dupla D3, que houve menos registros de suas estratégias de resoluções. Não havia discussões entre a dupla, o que impossibilitou uma transcrição do diálogo. Ao longo da atividade, foi a dupla que menos fez questionamentos, e tivemos que ensinar o uso da calculadora científica, pois nunca haviam manuseado esse tipo de tecnologia.

Plano de Desenvolvimento Econômico

Em razão da criação de um Plano de Desenvolvimento Econômico por meio de incentivos na redução de recolhimento de impostos, a produção de determinado alimento em um país da América do Sul, foi igual a 1 tonelada no final do ano 2000 e, após o plano de crescimento incentivado pelo setor, a produção passou a triplicar anualmente a partir daí. Conforme ilustra a tabela a seguir:

Ano (t)	Produção P (em toneladas)	Potência Correspondente
2000	1	3^0
2001	3	3^1
2002	9	3^2
2003	27	3^3
2004	81	3^4
2005	243	3^5
2006	729	3^6
2007	2.187	3^7
2008	6.561	3^8
2009	19.683	3^9
....
2015	14 348 907	3^{15}
2000 + ...		3^8

Tabela 1 Situação de Aprendizagem 1 retirada do Caderno do Professor de Matemática e adaptada pela autora. Fonte: São Paulo, 2009, p.12

Observe a produção P em toneladas e complete o restante da tabela. Justifique sua resposta.

Podemos escrever os valores da Produção P (em toneladas) na forma de potência, desta forma complete a coluna relacionando esses valores com a potência correspondente. Justifique sua resposta

Para chegarmos a esse processo usamos a potenciação para ter um resultado obtido 3^8

Figura 63 - Protocolo da dupla D3 - Sessão I.

Não conseguimos observar as estratégias para realizar a atividade, pois a dupla completou a tabela de modo sucinto sem deixar registros das estratégias de resolução. Questionamos a dupla D3 para sabermos como completou a tabela, e a dupla respondeu que como estava escrito no enunciado a palavra “TRIPLICAVA”, tentaram multiplicar os valores por 3.

Tal fato foi previsto por nós em nossas análises *a posteriori*, porém a dupla deduziu que este não foi o caminho, e observou que na terceira coluna estava escrito “transforme em potência correspondente”; então a dupla procurou outra estratégia de resolução e usou a calculadora para testar os valores elevando números aleatórios no expoente e rapidamente concluiu que o número do expoente estava relacionado com o último algarismo do ano na primeira coluna.

Os processos do Pensamento Matemático Avançado envolvido, segundo o relato da dupla D3, foram: intuir, conjecturar, testar hipóteses, mudanças de representações e generalização. Observamos que a dupla relacionou a palavra “triplicar” com multiplicar por 3, conjecturou que o caminho para a resolução da situação-problema era somente fazer as devidas multiplicações, no entanto ao testar suas hipóteses, verificou que suas conjecturas eram falsas. Pelos registros da dupla D3 podemos afirmar que houve uma conversão no registro de saída da língua natural para o registro numérico no registro de chegada. E no item (c) a dupla D3 efetuou a conversão de tabela (registro de partida) para o registro algébrico (registro de chegada).

No item (d), a dupla D3 fez a relação da representação no registro numérico e fez a conversão para o registro da língua natural, pois no contexto da situação-problema, concluiu que $3^{0,5}$, o expoente estava se referindo à metade do ano.

b) Observe a regularidade dos expoentes da potência, existe alguma relação com outros valores apresentados nas outras colunas? Justifique sua resposta.
Sim porque usamos o último algarismo do ano para fazer a potencialização para dar o resultado certo.

c) Observe os dados inseridos na tabela e estabeleça uma expressão algébrica que relacione a produção de alimentos (em toneladas) em função do tempo (ano). Justifique sua resposta.
Para chegar no resultado não usamos o último algarismo do ano, para fazer a generalização usamos a letra x , para representar o último algarismo do ano.

d) Os valores apresentados na tabela pertencem ao conjunto dos números naturais, entretanto podemos estender para o conjunto dos números reais. No contexto da situação problema apresentada acima, o que significa calcular $P = 3^{0,5}$?
significa a metade de um ano.

e) No mesmo contexto do item (d) o que significa $3^{0,5} \cdot 3^{0,5} = 3^{0,5+0,5} = 3^1$?
Sim seria um ano.

f) Com a ajuda de uma calculadora científica, calcule $3^{0,5}$. Qual valor você encontrou? *1,73*
 Agora faça o mesmo com $\sqrt{3}$ e com $3^{\frac{1}{2}}$ observe e compare os resultados e o que você pode concluir? *Para fazer a conclusão a uma diferenciação, mas os valores são os mesmos usando a potencialização ou a divisão.*

g) Usando a calculadora científica qual será o valor da produção de alimentos P (em toneladas) após 4,5 anos neste país? *A tonelada de alimento 180, 296 1154, daqui a quatro anos e meio.*

Figura 64 - Protocolo da dupla D3 - Sessão I.

Acreditamos que no item (f) a dupla D3 não compreendeu as diferentes formas de representar o número irracional; este fato não foi previsto em nossa análise *a priori*. No item (g) utilizaram de forma inadequada a calculadora, pois fizeram tratamento no registro numérico, mas não sabemos qual estratégia foi utilizada para chegar ao resultado registrado no protocolo. (Figura 64).

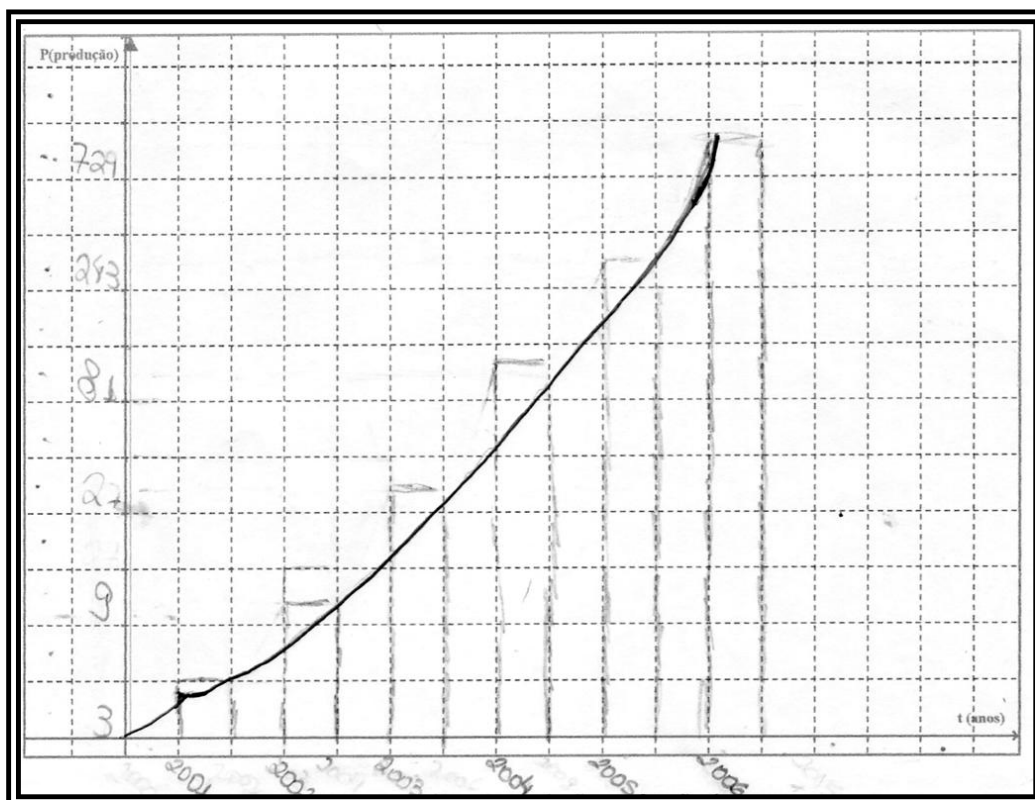


Figura 65 - Protocolo da dupla D3 - Sessão I.

Pelo o esboço do gráfico apresentado pela dupla D3, observamos que foi feita a conversão do registro de tabela (no registro de partida) para o registro gráfico (registro de chegada).

4.5.1.4. Síntese dos resultados da análise *a posteriori* da Sessão I

O objetivo da Sessão 1 foi propor uma situação-problema para explorar os conceitos fundamentais das potências e suas propriedades, relacionar as diferentes formas de representação na forma de potência, utilizando expoentes com números reais.

Esperávamos que os alunos ao fazerem a situação-problema em conjunto com os dados organizados no registro de tabela, estabelecessem uma relação de interdependência entre a grandeza tempo com a produção da empresa e assim expressasse no registro algébrico uma função P definida por $P(t) = 3^t$.

A seguir apresentamos o quadro síntese de nossa análise *a posteriori* da Sessão I:

Sessão I	Síntese dos Resultados		
	D1	D2	D3
Dificuldades encontradas	Expressar-se no registro da língua natural.	Mudança de base, interpretar o enunciado, expressar-se no registro da língua natural.	Trabalho em dupla favorecendo discussões, usar a calculadora científica, conceituar número irracional e racional nos expoentes.
Estratégias de Resolução	Relação da ideia de sequência para observar padrões.	Algoritmo da divisão.	Uso da calculadora para testar os resultados, multiplicou por 3, e depois de algum tempo percebeu que a solução estava relacionada com a potência na base 3.
Aprendizagem e ou abstração dos conceitos	Compreensão da variável no expoente, relação de interdependência entre as grandezas, conceito de número irracional.	Relação da divisão com a transformação de um número em outra base. Relação da variável no expoente.	Compreensão da relação entre as grandezas e a variação no expoente.
Conversão de registros	Língua natural para o registro algébrico, registro algébrico para o registro gráfico.	Língua natural para o registro algébrico; registro algébrico para o registro gráfico.	Língua natural para o numérico, e algébrico posteriormente.
Tratamento de registros	Tratamento numérico utilizando potências com expoentes racionais e irracionais.	Tratamento numérico	Tratamento numérico utilizando potências com expoentes racionais e irracionais.
Processos do PMA envolvidos	Mudança de Representação, generalização.	Visualização, levantamento de conjecturas, mudança de representação, generalização.	Visualização, levantamento de conjecturas, mudança de representação, generalização.

Figura 66 - Síntese dos Resultados da análise *a posteriori* da Sessão I.

Observamos que as duplas inicialmente apresentaram dificuldades em interpretar a situação-problema e principalmente no que se refere à mudança de representação na forma de potência. Pedimos às duplas que retomassem a leitura e observassem os dados apresentados na situação-problema e discutissem quais as possíveis estratégias de resoluções.

Ressaltamos a importância das três duplas estabelecerem uma expressão algébrica que representasse a situação-problema, observarem que a variação entre as grandezas ocorria no expoente, e que a produção dependia do tempo, noção fundamental para a continuidade de nosso estudo.

Acreditamos que ao final desta Sessão atingimos o nosso objetivo inicial, pois todas as duplas realizaram a atividade de modo satisfatório e realizaram discussões pertinentes ao que estava sendo proposto.

4.5.2. Análise *a posteriori* da Sessão II

Objetivo: Explorar as características da função exponencial, suas condições de existência¹⁹ representadas por meio de tabelas e possibilitar mudanças de representações o *software* GeoGebra.

Na questão abaixo temos por objetivo que os alunos utilizem os valores apresentados na primeira coluna para x e efetuem o cálculo da potenciação e relacionem as propriedades da potenciação com expoente negativo e expoente fracionário.

x	2^x	3^x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$
1				
2			$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$	
3				
0	$2^0 = 1$			
-3	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$			
$\frac{1}{2}$		$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \cong 1,73$		$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0,71$

Figura 67 - Situação de Aprendizagem 1 adaptada pela autora.
Fonte: São Paulo, 2009, p. 14.

¹⁹ Estamos nos referindo ao domínio da função exponencial, entretanto, utilizamos o termo “condição de existência”, pois é comum encontrarmos em livros didáticos do Ensino Médio.

De modo geral as três duplas obtiveram as mesmas dificuldades no preenchimento da tabela acima, pois de nenhuma forma mencionamos as propriedades de potências como caminho para a resolução. O fato de que havia alguns valores para serem completados, possibilitou o processo de observar, estabelecer conjecturas e levantar hipóteses para fazer a relação das propriedades das potências com expoentes negativos, potência de números fracionários e radicais estudadas no Ensino Fundamental. Acreditamos que o uso da calculadora facilitou o desenvolvimento da atividade.

The image shows a handwritten document with mathematical notes. On the left side, there are calculations for square roots and cube roots: $2^{\frac{1}{2}} = 1.41$, $3^{\frac{1}{3}} = 1.5$, and $4^{\frac{1}{2}} = 2$. There is also a note 'Propriedade' and some other scribbles. On the right side, there are calculations for powers of $\frac{1}{2}$: $\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0.5$, $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, and $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$. There is also a note 'Processo de divisão' and a small fraction $\frac{1}{0.125}$.

Figura 68 - Rascunho feito pela dupla D3 – Sessão II.

Podemos observar o que Dreyfus chama de processo de mudança de representação, investigação ao analisar o rascunho da dupla D3 (Figura 68). A dupla D3 utilizou a calculadora científica e verificaram que $2^{\frac{1}{2}} = 2^{0.5} = \sqrt{2}$ possuem diferentes representações, mas possuem o mesmo valor. A dupla D3 utilizou a calculadora para testar outros valores como consta no protocolo acima.

Nosso objetivo foi possibilitar uma relação entre a tabela 1 proposta na atividade e a representação do gráfico das funções na atividade 2, para que os alunos pudessem observar alguns valores e concluir que a função g definida por $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ é uma função decrescente enquanto que a função f definida por $f(x) = 2^x$ é uma função crescente.

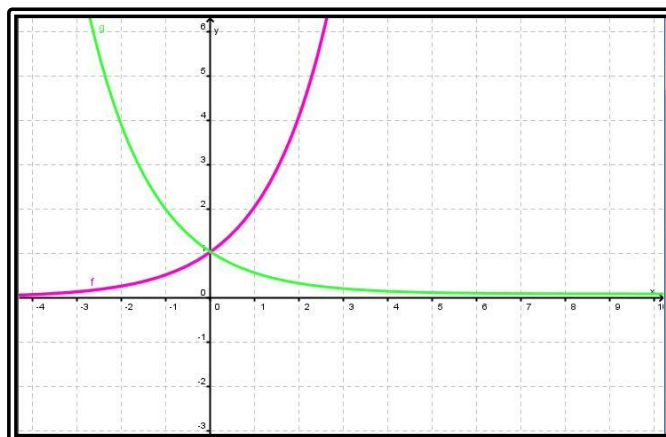


Figura 69 – Representação da função exponencial no registro gráfico.

Observamos que as três duplas tiveram dificuldades em interpretar o item (c) conforme a Figura a seguir, pois identificaram a representação do gráfico da função apenas como um desenho, e não como uma relação de dependência entre as grandezas x e y .

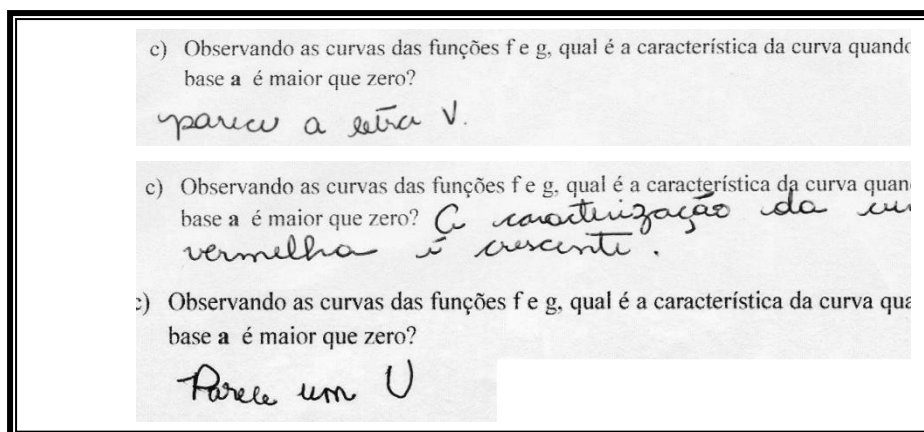


Figura 70 - Recorte do protocolo das duplas D1, D2 e D3.

Após essa atividade, a partir do item (d), as duplas utilizaram o *software* GeoGebra para responder os demais itens. Percebemos conforme as duplas foram utilizando o *software*, demonstraram um maior entusiasmo, pela rapidez que o GeoGebra facilita ao esboçar o gráfico das funções.

Registramos um diálogo entre a dupla D2 e a professora, enquanto esta dupla demonstrou ter dúvidas no item (d).

Diálogo entre a dupla D2 e a professora:

D2: “Professora o que é $0 < a < 1$?”

Profª: “Quem é a base?”

D2: “Então devemos usar $y = (0,1)^x$, e poderemos usar valores até $y = (0,999)^x$? ”

D2: “Bem... percebemos que todas as curvas passam em $y = 1$, mas porque isso acontece?”

Profª: “Observem melhor o gráfico dessas funções e explorem com o mouse as coordenadas de alguns pontos dessas funções.”

D2: “Ah! Então todas têm $x = 0$ quando $y = 1$. De modo geral podemos dizer que as curvas estão decaindo, ou melhor, decrescente.”

A dupla D3 fez o seguinte relato: “Percebemos que as funções que possuem a base maior que 0 e menor que 1 são decrescentes, pois quanto menor é o valor de x e o valor de y .”

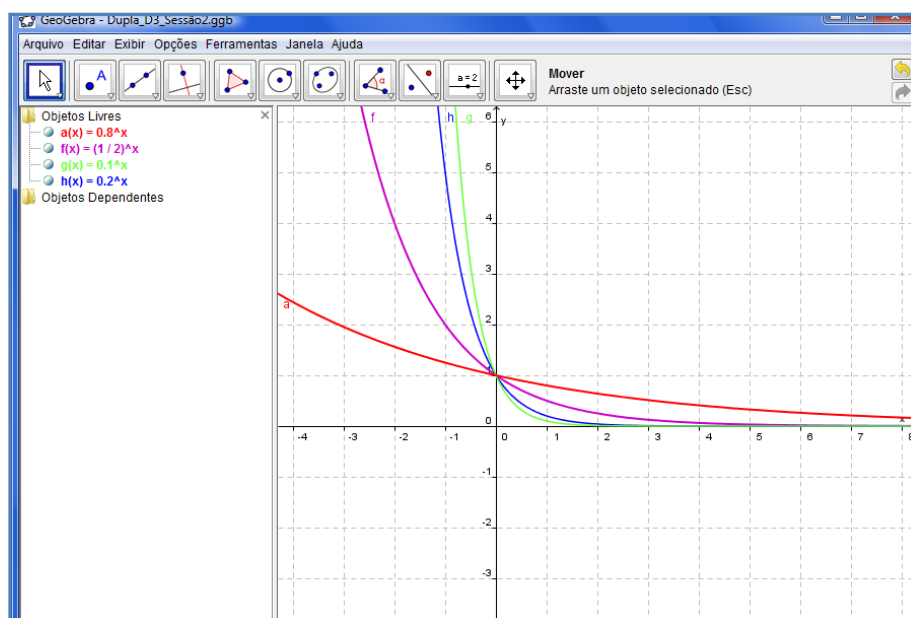


Figura 71 - Protocolo da dupla D3 - Sessão II.

O uso do *software* GeoGebra facilitou um dos processos do Pensamento Matemático avançado, que Dreyfus chama de visualização. O autor ressalta a

importância da visualização para que o aluno faça análise de casos particulares e generalizar para casos gerais.

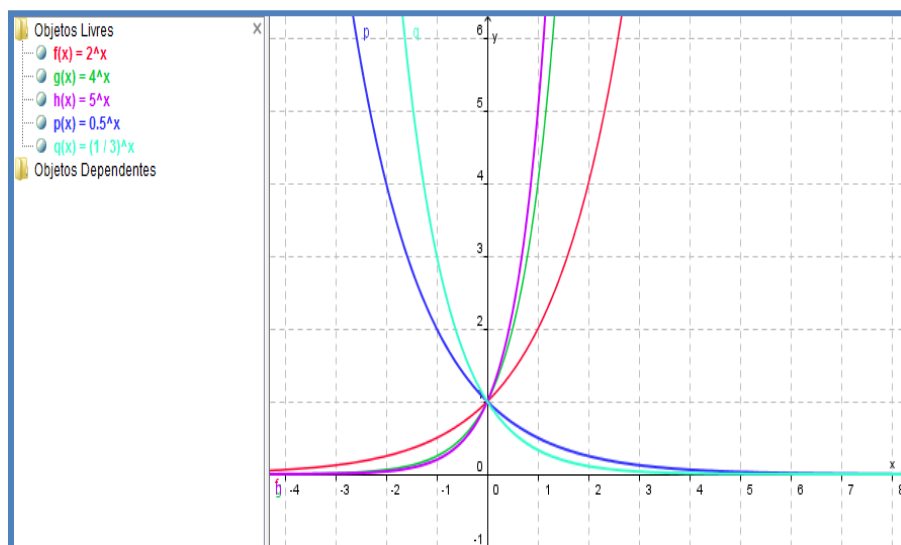


Figura 72 - Protocolo da dupla D2 usando o software GeoGebra.

Não percebemos dificuldades em resolver o item (e), pois todas as duplas estabeleceram a relação que todo “número elevado a zero é igual a 1”, e fizeram esta relação com ao usar o software GeoGebra.

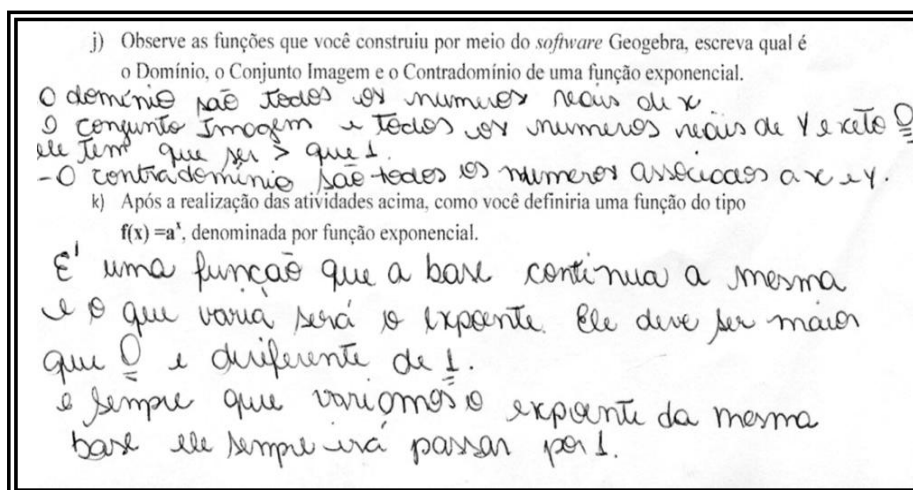


Figura 73 - Protocolo da dupla D2 - Sessão II.

Ao analisarmos o protocolo da dupla D2 (Figura 73), concluímos que esta dupla conseguiu responder às questões de modo satisfatório, não sabemos se esta dupla D2 compreendeu o conceito da função exponencial, mas há indícios de que houve compreensão do expoente ser uma variável. A visualização, generalização, observação, foram os processos do Pensamento Matemático Avançado que predominaram ao realizar esta atividade com a dupla D2.

Ressaltamos que a dupla D2 conseguiu explicitar o domínio e a imagem da função de forma adequada, após percorrerem com o *mouse* por diversas vezes, e perceberam que essas funções tendem ao infinito. De um modo geral, o conceito de domínio de uma função é apresentado no registro algébrico e os estudantes sentem dificuldades em entender esse conceito. Acreditamos que o *software* GeoGebra ao possibilitar a visualização e possibilitar a ferramenta de arrastar os gráficos de forma dinâmica usando o *mouse*, possibilitou a dupla concluir que o domínio da função tende ao infinito.

Por outro lado, observamos que as duplas D1 e D3, tiveram dificuldades em escrever o que eles visualizavam, pois disseram: *"Nas aulas de matemática em geral, não somos motivados a justificar as nossas conclusões com palavras mas apenas com números"* (dupla D1).

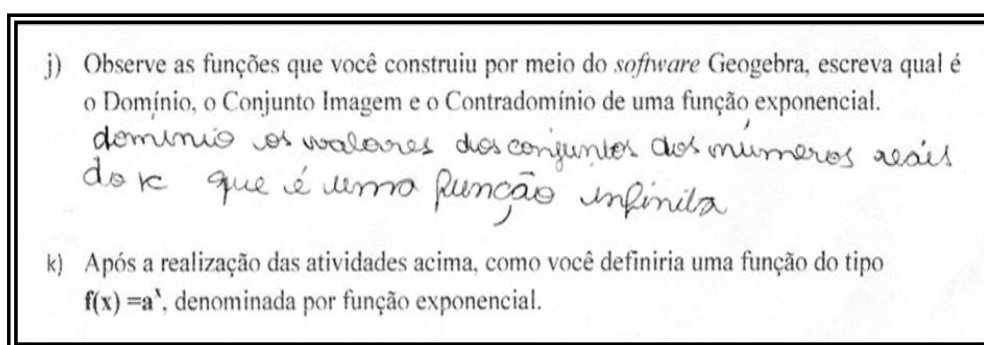


Figura 74 - Protocolo da dupla D3 - Sessão II.

No protocolo da dupla D1, percebemos que a dupla compreendeu o conceito de domínio e imagem da função. A dupla D1 ressaltou a importância da visualização para a compreensão deste conceito, pois relataram que quando estavam no 1º ano do Ensino Médio eles não entendiam o que era “explicitar o domínio de uma função, caso ele exista”, segundo estes alunos, as perguntas eram feitas apenas usando expressões algébricas.

Percebemos que os registros desta dupla ficaram confusos, a mesma não interagiu entre si e este fato para nós dificultou a conclusão se eles compreenderam o conceito da função exponencial.

4.5.2.1. Síntese da Análise dos resultados a posteriori da Sessão II

Na Sessão II o nosso objetivo foi explorar a função exponencial nos diversos registros de representação: tabela, gráfico, algébrico e propiciar assim a conversão entre esses registros.

Na primeira questão, as duplas tiveram dificuldades para completar a tabela e observar as diferentes representações no registro numérico, quando a base possui um expoente negativo e fracionário. O uso da calculadora facilitou o processo de testar hipóteses que as duplas formularam ao longo das atividades.

Ao realizar a atividade 2 nenhuma dupla relacionou os dados da tabela apresentados na atividade 1 com as funções exponenciais apresentadas no registro gráfico. Dados de pesquisas realizadas por Duval apontam que os alunos apresentam dificuldades em fazer a conversão do registro gráfico para o registro algébrico. Deste modo, procuramos apresentar a função no registro de partida utilizando o registro de tabela e algébrico para que as duplas relacionassem com as curvas apresentadas no registro gráfico. Entretanto, este fato não aconteceu de forma tão imediata. Esta relação só foi concretizada, quando usamos o *software* GeoGebra que possibilitou a visualização das funções.

Achamos importante ressaltar que as duplas compreenderam o domínio da função exponencial no registro gráfico, e comentaram que o domínio da função foi trabalhado apenas no registro algébrico.

Ao analisar os registros dos protocolos das duplas observamos que muitas questões ficaram confusas. Percebemos a necessidade do professor de Matemática utilizar o registro na língua natural como forma de validar as justificativas dos alunos e não apenas nos registros numéricos e algébricos.

A seguir apresentamos o quadro síntese de nossa análise *a posteriori* da Sessão II:

Sessão II	Síntese dos Resultados		
	D1	D2	D3
Dificuldades encontradas	A compreensão do conceito de função a partir do registro gráfico e expressar-se no registro da língua natural.	A observação de quando uma função exponencial é crescente ou decrescente com o uso do <i>software</i> GeoGebra, seus registros ficaram um pouco confusos sobre o conceito de função exponencial.	Expressar-se no registro da língua natural, preenchimento da tabela, uso das potências com expoentes racionais e irracionais.
Estratégia de Resolução	Uso do <i>software</i> GeoGebra e da calculadora.	Uso do <i>software</i> GeoGebra e da calculadora.	Uso do <i>software</i> GeoGebra e da calculadora.
Aprendizagem e ou abstração dos conceitos	Reconhecimento de uma função exponencial crescente e decrescente a partir do seu gráfico.	Generalização que todas as funções exponenciais passam por $y = 1$, Conjunto Domínio e Imagem da função.	Compreensão de que na função exponencial a variável é no expoente.
Conversão de registros	Registro gráfico para algébrico, e do registro algébrico para o numérico.	Registro gráfico para algébrico, e do registro algébrico para o numérico.	Registro gráfico para algébrico, e do registro algébrico para o numérico.
Tratamento de registros	Tratamento no registro numérico.	Tratamento no registro numérico.	Tratamento no registro numérico.
Processos do PMA envolvidos	Observação, mudança de representação, visualização.	Observação, mudança de representação, visualização.	Observação, a mudança de representação, visualização.

Figura 75 - Síntese dos Resultados da análise *a posteriori* da Sessão II.

Ao realizar esta Sessão, acreditamos que nossos objetivos foram alcançados, pois as duplas justificaram em seus registros as características da função exponencial tais como Domínio, imagem, crescimento e decrescimento da função.

4.5.3. Análise *a posteriori* da Sessão III

O objetivo da Sessão foi propor situação-problema para a construção do conceito de logaritmo e promover uma discussão do tema, de modo a construir este conceito por meio da função exponencial, conforme o Caderno do Professor de Matemática (SÃO PAULO, 2009) citado anteriormente. Para nossa análise *a posteriori* dos protocolos dos alunos, faremos a confrontação com a análise *a priori* e verificaremos quais processos do Pensamento Matemático Avançado, segundo Dreyfus (1991), quais foram os tratamentos e as conversões de registros de representação semiótica segundo Duval (2009) nas resoluções dos alunos.

4.5.3.1. Análise do protocolo da dupla D1

Como previmos em nossa análise *a priori* a dupla D1 não teve dificuldade em responder os itens (a), (b), (c) e (d), pois era questões que necessitavam apenas fazer manipulações aritméticas no tratamento numérico e reconhecer que a variável dependente estava no expoente, como também compreender a situação-problema. A partir do item (e) as dificuldades começaram a surgir, como por exemplo, na mudança da variável, pois fizeram: $N = 3.000 \cdot 10^{0,1 \cdot (2,3)}$ e foram atribuindo vários valores para t até chegar no expoente procurado. Ao contrário da outra dupla D1, esta não conseguiu chegar à forma $10^{0,1 t} = 200$, pois não observou que no lugar de N era necessário atribuir o valor de 600 000. Faltou a compreensão que o valor procurado era o número representado pela letra t e não o valor de N .

Após inúmeras tentativas de encontrar o expoente necessário para a solução do problema, pedimos para que a dupla D1 deixasse o item (e) e continuasse a leitura dos demais itens, e mesmo no item (g) que sugere o uso de 3 casas decimais, esta dupla usou várias casas decimais para expoente.

O item (e) só foi resolvido depois que utilizou a tecla *log*, escreveu $\log 200 = 2.30102996$ e arredondou para 2.20103.

Embora tenha encontrado o valor correto do expoente para a variável t , a dupla D1 escreveu da seguinte maneira:

e) Depois de quanto tempo, após a fundação, o valor de N atingirá 600 000?
 $N = 3.000 \cdot 10^{0,1} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10^3$ $N = 3000000$

Figura 76 - Protocolo da dupla D1 - Sessão III.

Talvez o erro possa ter sido ocasionado pela manipulação da calculadora científica, ou por falta de atenção.

h) Agora aperte a tecla log 200. Qual é a sua conclusão?
 Que ela é bem útil que resolve rapidamente nossos problemas ela encontra o expoente.
 i) A partir dos dados encontrados, volte ao item (g) e termine de resolvê-lo.
 $N = 3.000 \cdot 10^{0,1} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10^3$
 $N = 3000 \cdot 200$
 $N = 600000$

Figura 77 - Protocolo da dupla D1 - Sessão III.

A dupla concluiu que o logaritmo é o expoente, mas não percebeu que o item (e) era o inverso do que eles fizeram nos itens (a), (b), (c) e (d).

2) Observe os números disposto e complete a tabela

N	Escrita em Potência	Escrita em Logaritmo
100	10^2	$\log 100 = 2$
1000	10^3	$\log 1000 = 3$
10	10^1	$\log 10 = 1$
10^0	10^0	$\log 10 = 0,1$
100	$10^{\frac{1}{2}}$	$\log (5 = \frac{1}{2}) 10^{\frac{1}{2}} = 3,16 \dots$
100	10^{-2}	$\log 10^{-2} = 0,04$
1	10^0	$\log 1 = 1$
0,1	10^{-1}	$\log 0,1 = -1$
0,001	10^{-3}	$\log 10^{-3} = -3$
0,0004	$4 \cdot 10^{-4}$	$\log 0,0004 = -4$
-10	-10^1	$\log -10 =$
0	$-$	$-$

Figura 78 - Protocolo da dupla D1 - Sessão III.

Ao analisar o protocolo acima, observamos inúmeras dificuldades na mudança de representação e a relação do registro numérico na escrita em forma de potência para a escrita em logaritmos. A dupla D1 conseguiu relacionar a atividade realizada na Sessão I, para uma mudança de representação de um

expoente fracionário para a forma de um radical. Onde consta $10^{\frac{1}{2}}$, a dupla escreveu o $\log 5 = \frac{1}{2}$ e novamente escreveu $10^{\frac{1}{2}} = 3,16...$, parece que a dupla fez ($10 \div 2 = 5$) e concluiu que o $\log 5$ é igual a $\frac{1}{2}$, não concluindo que o $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2}$.

Acreditamos que essa dificuldade está relacionada à compreensão do conceito de logaritmos representada por um radical ou com expoente fracionário.

Por meio deste protocolo, observamos que esta dupla não compreendeu que o logaritmo está relacionado com o expoente. Uma das dificuldades debatidas entre a dupla D1 foi mudar a representação do número 1 para a base 10. Uma aluna chegou a dizer: “*Como transformar o número 1 em 10? Isso é impossível!*” Entretanto o seu colega disse: “*Você esqueceu que se colocarmos no expoente o número zero, teremos o número 1, é somente uma mudança de representação numérica.*” Observamos que a dupla não utilizou a calculadora científica para conferir os resultados.

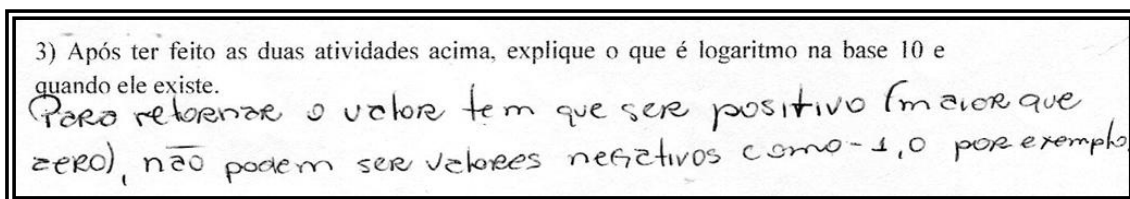


Figura 79- Protocolo da dupla D1 - Sessão III.

Após ter completado a tabela na questão 2, a dupla D1 observou a tabela novamente, utilizou a calculadora científica e percebeu que o logaritmo na base 10 existe para valores maiores que zero, mas esqueceu de incluir o zero em suas conclusões.

Os Processos do Pensamento Matemático Avançado presentes nesta atividade são os da observação e visualização. O uso da calculadora científica foi relevante para que a dupla D1 respondesse à questão, entretanto percebemos que não houve conferência dos resultados na tabela anterior. Perguntamos aos alunos como eles usavam a calculadora científica nas aulas, e responderam que era somente para resolver os cálculos, mas nunca retornavam a questão para verificar se o resultado estava correto.

Percebemos a falta do uso da calculadora para testar e validar conjecturas, servindo apenas como uma ferramenta, sem uma reflexão dos resultados.

4) A partir dos logaritmos de alguns números podemos obter os logaritmos de outros, efetuando cálculos com potências. Dados os valores de logaritmos de 2 e 3, podemos calcular os logaritmos dos números indicados. Se $\log 2 \cong 0,30$ (ou seja $2 \cong 10^{0,30}$) e $\log 3 \cong 0,47$ (ou seja $3 \cong 10^{0,47}$) então calcule:
 Faça $\log 6 = \log (2 \cdot 3) = \log (10^{0,30} \cdot 10^{0,47}) = \log (10^{0,30+0,47}) = \log 10^{0,77} = 0,77$
 Analogamente calcule e confirme o resultado com sua calculadora científica:

a) $\log 9$ $\log 9 \cong 0,95 = (3 \cdot 3) = \log (10^{0,47} \cdot 10^{0,47}) = \log (10^{0,47+0,47}) = \log 10^{0,94} = 0,94$
 $\log 10^{0,95} = 0,95$

b) $\log 4$ $\log 4 \cong 0,60 = (2 \cdot 2) = \log (10^{0,30} \cdot 10^{0,30}) = \log (10^{0,30+0,30}) = \log 10^{0,60} = 0,60$
 $\log 10^{0,60} = 0,60$

c) $\log 12$ $\log 12 \cong 1,07 = (2 \cdot 6) = \log (10^{0,30} \cdot 10^{0,77}) = \log (10^{0,30+0,77}) = \log 10^{1,07} = 1,07$
 $\log 10^{1,07} = 1,07$

d) $\log 36$ $\log 36 \cong 1,55 = (6 \cdot 6) = \log (10^{0,77} \cdot 10^{0,77}) = \log (10^{0,77+0,77}) = \log 10^{1,54} = 1,54$
 $\log 10^{1,54} = 1,54$

e) $\log 18$ $\log 18 \cong 1,25 = (3 \cdot 6) = \log (10^{0,47} \cdot 10^{0,77}) = \log (10^{0,47+0,77}) = \log 10^{1,24} = 1,24$
 $\log 10^{1,24} = 1,24$

Figura 80 - Protocolo da dupla D1 – Sessão III.

A dupla D1 não apresentou dificuldades para resolver a questão acima. A mesma realizou um tratamento no registro numérico, e o processo do Pensamento Matemático Avançado presente é o da observação.

5) Repetindo o procedimentos realizados nos itens acima, sendo $A = 10^a$ e $B = 10^b$ então podemos escrever $\log A \cdot B = \log (10^a \cdot 10^b) = \log (10^a + 10^b) = \log 10^{AB} = \log 10^{AB} = AB$

6) Determine o valor dos logaritmos abaixo:

a) $A = \log_2 \frac{16}{4} = 2$ $A = \log_2 \frac{16}{4} = \log_2 4 = 2$

b) $B = \log_2 16 - \log_2 4 = 4$ $4 - 2 = 2$

Observe os itens (a) e (b) da questão anterior. Sendo $A = B$ e $c = a$ base do logaritmo então poderemos escrever que $A = \frac{\log_c a}{\log_c b} = \frac{2}{4} = 4 - 2 = 2$

Figura 81 - Protocolo da dupla D1 - Sessão III.

Na questão 5 e 6, a dupla D1 realizou os processos do Pensamento Matemático Avançado como a observação e a generalização, pois retornou à questão 4 e fez o $\log AB = \log a + \log b$, deduzindo com isso, que na divisão seria

o mesmo processo, ou seja, $\frac{\log A}{\log B} = \log A - \log B$. Contudo, não fizeram o tratamento do registro numérico para o registro algébrico na questão (6) como previmos em nossa análise *a priori*.

7) Dada a expressão $M = \log_2 7^3$ escreva

a) como um produto de logaritmos em fatores iguais.

$M = \log_2 (7, 7, 7)$

b) Agora, transforme o produto de encontrado na questão anterior em soma de 3 parcelas. Chamando de N a expressão que você encontrou

$N = \log_2 7 + \log_2 7 + \log_2 7 = 3 \log_2 7$

c) Podemos dizer que $N = M$?

Sim porque possuem a mesma representação

d) Observe os itens (a), (b) e (c) então podemos escrever que se o $\log_a M^N =$

$N \cdot \log_a M$

Figura 82- Protocolo da dupla D1 - Sessão III.

Na questão 7 a dupla D1 teve dificuldade em interpretar a questão, pois não sabia o significado da frase: “produto de fatores iguais”, após várias tentativas e discussões, percebeu que era desenvolver o logaritmo de uma potência por meio de uma multiplicação. A maior dificuldade foi escrever a expressão no registro algébrico.

8) Complete a tabela:

Equação na forma Exponencial	Equação na forma Logarítmica	Cálculo do Logaritmo
$2^x = 8$	$\log_2 8 = x$ ou $\log_2 8 = x$	$x = 3$
$5^x = 125$	$\log_5 125 = x$ ou $\log_5 125 = x$	$x = 3$
$10^x = 30$	$\log_{10} 30 = x$ ou $\log 30 = x$	$x = 1,4$
$2^x = 32$	$\log_2 32 = x$ ou $\log_2 32 = x$	$x = 5$
$3^x = 243$	$\log_3 243 = x$ ou $\log_3 243 = x$	$x = 5$
$10^x = 50$	$\log_{10} 50 = x$ ou $\log 50 = x$	$x = 1,9$
$10^x = 0,98$	$\log_{10} 0,98 = x$ ou $\log 0,98 = x$	$x = -0,017$
$10^x = 950$	$\log_{10} 950 = x$ ou $\log 950 = x$	$x = 2,97$
$10^x = 15000$	$\log_{10} 15000 = x$ ou $\log 15000 = x$	$x = 4,17$

Figura 83 - Protocolo da dupla D1 - Sessão III.

A dupla D1 encontrou dificuldades para resolver a questão acima, observamos que a dupla não fez a distinção, por exemplo, de $\log 243 \neq \log_3 243$.

Notamos também um erro no cálculo do $\log 0,98 = -0,0087$, além de erros no tratamento aritmético. Todavia, nas discussões feitas entre a dupla percebemos que com esta atividade, ficou claro que o logaritmo é um expoente.

a) Qual é a população inicial de cada uma das regiões?
 A população inicial A = 6.000 B = 600

b) Depois de quantos anos, a partir do instante inicial, as duas regiões terão a mesma população?

c) Qual é a população de cada uma das regiões 15 anos após o instante inicial?
 Dado $10^2 \approx 31,62$.

B.

$$N_B = 600 \cdot 10^{0,2 \cdot T} \quad N_A = 6000 \cdot 10^{0,1 \cdot T}$$

$$600 \cdot 10^{0,2 \cdot T} = 6000 \cdot 10^{0,1 \cdot T}$$

$$10^{0,2 \cdot T} = 6000 / 600 \cdot 10^{0,1 \cdot T}$$

$$10^{0,2 \cdot T} = 10^1 \cdot 10^{0,1 \cdot T}$$

$$0,2 \cdot T = 1 + 0,1 \cdot T$$

$$0,2 \cdot T - 0,1 \cdot T = 1$$

$$0,1 \cdot T = 1$$

$$T = 1 / 0,1$$

$$T = 10$$

$$N_A = 6.000 \cdot 10^{0,1 \cdot 10}$$

$$N_A = 6.000 \cdot 10^{10}$$

$$N_A = 6.000 \cdot 10^6$$

$$N_A = 6.000 \cdot 31,62$$

$$N_A = 189,720$$

$$N_B = 600 \cdot 10^{0,2 \cdot 15}$$

$$N_B = 600 \cdot 10^{3}$$

$$N_B = 852$$

$$N_B =$$

Figura 84 - Protocolo da dupla D1 - Sessão III.

Ao analisar o protocolo (Figura 84), observamos que os registros estão bem confusos, no item (a) não houve o registro de como a dupla D1 chegou aos resultados. No item (b) observamos que não encontraram dificuldades com o tratamento aritmético, a dupla fez $(6000 \div 600 = 10)$ e transformou os resultados em notação de base 10, utilizando a propriedade da potência de forma correta, e com isso chegaram ao resultado esperado. No item (c) não conseguiu realizar o tratamento aritmético de forma correta.

Nesta Sessão, a dupla D1 apresentou várias dificuldades nos tratamentos numéricos e algébricos presentes nos protocolos. Contudo, é uma dupla que realiza discussões e propicia o trabalho em equipe.

Os dados relativos às pesquisas realizadas por Karrer (1999), Ferreira (2006), Saldanha (2007), Lima (2009) no que diz respeito às dificuldades dos alunos nos tratamentos aritméticos e algébricos, uso das potências com números

racionais e sob a forma de radicais, foram visíveis em nossas análises. No entanto, com relação ao conceito de logaritmos os protocolos indicam que a dupla D1 conseguiu abstrair de forma satisfatória.

4.5.3.2. Análise do protocolo da dupla D2

Ao fazer a leitura da situação-problema apresentada, o primeiro comentário que fizeram entre si foi:

F: Hum, qual valor que temos que substituir, o valor de t ou N ?

H: Vamos ler novamente.

F: Ah, se é uma função exponencial e a variável é o expoente, e t é o tempo, acho que temos que multiplicar t por 0,1.

H: Verdade, mas “será que t igual a 0 ou a 1?”

H: Mas olha aqui, se no momento que o município foi fundado...

F: Olha só, se vamos multiplicar por 0, e todo número elevado a zero é igual a 1, assim, a população inicial é de 3.000.

H: É verdade! Então vamos fazer 0,1. 0 que é o valor inicial.

No diálogo acima, a dupla fez a conjectura de que os valores a serem substituídos no item (a) estavam apenas entre 0 e 1. Testaram suas conjecturas e conseguiram chegar à solução do problema. Observamos a existência da dificuldade inicial em reconhecer que o t era a variável dependente, a conversão de registro foi do conjunto de partida, o registro da língua natural para o registro numérico e houve apenas um tratamento dos dados no registro de chegada. Nos itens (b) e (c) o tratamento numérico foi de forma correta, sem apresentar dificuldades. Segundo a dupla D2 o crescimento obedecia a um padrão, a cada dez anos era multiplicado por dez e o resultado seria o valor total da população. A descoberta deste padrão pode ser descrita ao observar o crescimento da população, o que generalizou um crescimento muito rápido.

E no item (d) transformou a solução do problema em notação científica, pois argumentou que os cálculos eram mais fáceis, pois era somente somar os expoentes base 10. No entanto, como previmos em nossa análise *a priori* a dupla

apresentou problema no item (e) no tratamento aritmético, pois ficou dúvida para isolar a variável t .

Chegaram à seguinte equação: $200 = 10^{0,1t}$ e comentaram entre si, como vamos transformar o número 200 em potência de base 10? A aluna F concluiu que o número só pode estar entre 2 e 3 no expoente. Depois que leram o item (g) confirmaram que o número no expoente estava entre 2 e 3 e utilizaram a calculadora para encontrar o valor procurado. Os números que utilizaram foram: 2,55; 2,33; 2,30; 2,301 e logo encontraram o valor do expoente e acharam a solução do problema. Ressaltamos que a dupla mostrou-se entusiasmada para encontrar o número desconhecido e quando encontrou, o entusiasmo aumentou.

Acreditamos que este momento de entusiasmo pode propiciar a aprendizagem por descoberta, um dos processos do Pensamento Matemático Avançado. No item (h) após conhecerem a tecla *log*, disseram: “Ah professora, essa tecla é fantástica, pois calcula os valores dos expoentes”. Neste momento, explicamos um pouco sobre o impacto da descoberta do logaritmo na sociedade da época.

Na Atividade 2, o registro de partida está em forma de tabela, a dupla apresentou dificuldade em preencher a tabela, observou que a escrita em logaritmos está relacionada com a potência, que para alguns valores o logaritmo não existe.

3) Após ter feito as duas atividades acima, explique o que é logaritmo na base 10 e quando ele existe.

Ele existe nos números reais e na que seja diferente de 0 e maior que 1, ele não existe em potência com base negativa, 0 e elevada a 0.

4) A partir dos logaritmos de alguns números podemos obter os logaritmos de outros, efetuando cálculos com potências. Dados os valores de logaritmos de 2 e 3, podemos calcular os logaritmos dos números indicados. Se $\log 2 \cong 0,30$ (ou seja $2 \cong 10^{0,30}$) e $\log 3 \cong 0,47$ (ou seja $3 \cong 10^{0,47}$) então calcule:

Faça $\log 6 = \log (2 \cdot 3) = \log (10^{0,30} \cdot 10^{0,47}) = \log (10^{0,30 + 0,47}) = \log 10^{0,77} = 0,77$

Analogamente calcule e confirme o resultado com sua calculadora científica:

a) $\log 9 = (3 \cdot 3) = \log (10^{0,47} \cdot 10^{0,47}) = (10^{0,47 + 0,47}) = 10^{0,94} = 0,94$

b) $\log 4 = (2 \cdot 2) = \log (10^{0,30} \cdot 10^{0,30}) = (10^{0,30 + 0,30}) = 10^{0,60} = 0,60$

c) $\log 12 = (2 \cdot 6) = \log (10^{0,30} \cdot 10^{0,77}) = (10^{0,30 + 0,77}) = 10^{1,07} = 1,07$

d) $\log 36 = (6 \cdot 6) = \log (10^{0,77} \cdot 10^{0,77}) = (10^{0,77 + 0,77}) = 10^{1,54} = 1,54$

e) $\log 18 = (2 \cdot 9) = \log (10^{0,30} \cdot 10^{0,94}) = (10^{0,30 + 0,94}) = 10^{1,25} = 1,25$

Figura 85 - Protocolo da dupla D2 - Sessão III.

Na questão 3, observamos que a dupla conseguiu expressar a condição de existência dos logaritmos. Acreditamos que o preenchimento da tabela em que aparece a escrita na forma de potência de base 10 e na forma logarítmica pode ter ajudado a dupla esta questão. A observação e a mudança de representação de um mesmo conceito são processos do Pensamento Matemático Avançado, presentes nesta atividade.

5) Repetindo o procedimentos realizados nos itens acima, sendo $A = 10^a$ e $B = 10^b$ então podemos escrever $\log A \cdot B =$

podemos juntar as bases e somar apenas o expoente

6) Determine o valor dos logaritmos abaixo:

a) $A = \log_2 \frac{16}{4} = \frac{4}{2} = 2$

b) $B = \log_2 16 - \log_2 4 = \log_2 2$

Observe os itens (a) e (b) da questão anterior. Sendo $A = B$ e $c =$ a base do logaritmo

então poderemos escrever que $A = \frac{\log_c A}{\log_c B} = \log_c A - \log_c B$

porque são iguais e estas multiplicando

Figura 86 - Protocolo da dupla D2 - Sessão III.

Em nossas observações, não percebemos nenhuma dificuldade para que a dupla conseguisse expressar as propriedades dos logaritmos no registro algébrico. Percebemos que esta dupla fez a relação das propriedades das potências com as propriedades dos logaritmos.

7) Dada a expressão $M = \log_2 7^3$ escreva

a) como um produto de logaritmos em fatores iguais.

$$\log_2 7^3 = \log_2 7 \cdot \log_2 7 \cdot \log_2 7$$

b) Agora, transforme o produto de encontrado na questão anterior em soma de 3 parcelas. Chamando de N a expressão que você encontrou

$$N = \log_2 7 + \log_2 7 + \log_2 7 = 3 \log_2 7$$

c) Podemos dizer que $N = M$?

$$3 \log_2 7 = \log_2 7^3 \text{ (Sim)}$$

d) Observe os itens (a), (b) e (c) então podemos escrever que se o $\log_a M^N =$

$$\frac{N \cdot \log M}{a}$$

Figura 87- Protocolo da dupla D2 - Sessão III.

A dupla D2 não apresentou dificuldade para converter o registro numérico para o registro algébrico. Um dos processos do Pensamento Matemático Avançado que podemos citar neste protocolo é o processo de generalização, pois a dupla partiu de um caso particular para a generalização.

Acreditamos que o desenvolvimento deste processo facilita a abstração de um conceito.

a) Qual é a população inicial de cada uma das regiões?

b) Depois de quantos anos, a partir do instante inicial, as duas regiões terão a mesma população?

c) Qual é a população de cada uma das regiões 15 anos após o instante inicial?

Dado $10^2 \approx 31,62$.

a.) $N_A = 6000 \cdot 10^{0,1 \cdot 0}$ $N_B = 600 \cdot 10^{0,21 \cdot 0}$
 $N_A = 6000 \cdot 10^0$ $N_B = 600 \cdot 10^0$
 $N_A = 6000 \cdot 1$ $N_B = 600 \cdot 1$
 $N_A = 6000$ $N_B = 600$

b.) $6000 = 10^{0,1t} = 600 \cdot 10^{0,21t}$
 $\frac{6000}{600} = 10^{0,1t} \cdot 10^{0,21t}$
 $10 = 10^{0,1+0,21t}$
 $10 = 10^{0,21t}$
 $1 = 0,21t$
 $\frac{1}{0,21} = t$
 $t = 4$

c.) $N_A = 6000 \cdot 10^{1,5}$ $N_B = 600 \cdot 10^{1,5}$
 $N_A = 6000 \cdot 31,62$ $N_B = 600 \cdot 31,62$
 $N_A = 189720$ $N_B = 18972$

Figura 88 - Protocolo da dupla D2 - Sessão III.

No protocolo da dupla D2 (Figura 88), percebemos que houve um pequeno deslize no tratamento aritmético, mas não houve dificuldade na interpretação da situação-problema e realizou de forma correta o tratamento aritmético relativo às propriedades das potências. Observamos no item (b) que a dupla cometeu um erro no tratamento aritmético, pois deveria ficar $10 = 10^{0,1t} \cdot 10^{0,21t}$ e a dupla confundiu a variável t com o número 1 e fez $0,1t + 0,21t$, esse pequeno equívoco comprometeu o resultado da situação-problema. No item (c) fez o tratamento aritmético de forma correta para o número de população da cidade A, mas para encontrar o número da população da cidade B, a solução não foi correta.

De modo geral na Sessão III, a dupla D2 demonstrou um avanço em relação à primeira Sessão. Esta dupla utilizou os recursos disponibilizados como o computador e a calculadora científica de modo dinâmico, para todas as atividades, houve discussão entre a dupla, utilizou os recursos disponíveis para testar suas conjecturas e verificar os resultados.

4.5.3.3. Análise do protocolo da dupla D3

<p>a) O Valor de N quando o município foi fundado; <i>naquele momento a cidade foi fundada</i></p> <p>b) O valor de N dez anos após a fundação; <i>30,000</i></p> <p>c) O valor de N nos dias atuais; <i>nos dias atuais é de 3.000</i></p> <p>d) Depois de quanto tempo, após a fundação a população atingirá a marca de 3000000 habitantes, se o ritmo de crescimento continuar assim? <i>fizemos a elevação dos números ex: 3.000×10^6 que dá 3.000.000</i></p> <p>e) Depois de quanto tempo, após a fundação, o valor de N atingirá 600 000?</p>
--

Figura 89 - Protocolo da dupla D3 - Sessão III.

A dupla D3 não deixou em seus registros quais tratamentos aritméticos e geométricos foram utilizados para responder as questões acima. No item (a) temos por hipótese de que a dupla D3 não compreendeu qual o significado da variável N, e esse significado no contexto do problema, correspondia à quantidade de população. Como relatamos anteriormente, essa dupla D3 teve um comportamento diferente das demais duplas, pois não havia interação, e quando perguntávamos se necessitava de alguma orientação, a dupla D3 recusava alegando que havia entendido tudo o que precisava fazer.

No item (b) notamos que a dupla escreveu $3.000.10 = 30.000$ ignorando o expoente. No item (c) podemos destacar que a dupla D3 registrou $N = 3000.10^0$ ou simplesmente ignorou a potência de base 10.

A dupla D3 utilizou o registro na língua natural para apresentar o resultado no item (d) e percebemos que nesta questão utilizaram a potência, mas não sabemos qual o raciocínio que tiveram para concluir que deveria fazer $3.000.10^6$, acreditamos que atribuiu valores para t utilizando a calculadora científica de forma que chegou a resposta esperada. Podemos destacar neste procedimento, o processo do Pensamento Matemático Avançado de conjecturar, para testar hipótese.

f) Você conseguiu chegar na expressão $10^{0,11} = 200$?
 Estamos $10^{12.303}$ deu o resultado 199.981

g) Observe que $10^2 = 100$ e que $10^3 = 1000$ então deve haver um número n entre 2 e 3 tal que $10^n = 200$, usando a calculadora científica tente encontrar um valor estimado para n . (use 3 casas decimais) O valor encontrado foi de 199.98615869637441 .

h) Agora aperte a tecla $\log 200$. Qual é a sua conclusão?
~~Estamos~~ Estamos trabalhando com os expoentes log expoentes

i) A partir dos dados encontrados, volte ao item (g) e termine de resolvê-lo.
 já resolvemos.

Figura 90 - Protocolo da dupla D3 - Sessão III.

No item (e) não houve resposta, perguntamos por que deixou em branco, e respondeu que o resultado estava na questão abaixo no item (f). Segundo a dupla D3, foram testando vários valores na calculadora (utilizaram uma calculadora on-line). Não usou regra de arredondamento, porque a dupla D3 queria saber quantas casas decimais o número poderia ter, e concluiu que “NUNCA” iria ser 200, mas o resultado estava muito próximo. Com relação a tecla \log disse: “É fantástica, pois não precisa ficar testando números”. Neste momento, contamos de maneira informal a história da invenção dos logaritmos para as três duplas.

2) Observe os números disposto e complete a tabela

N	Escrita em Potência	Escrita em Logaritmo
100	10^2	$\log 100 = 2$
1000	1000 10^3	$\log 1000 = 3$
10	10^1	$\log 10 = 1$
10^0	10^0	$\log 10 = 1$
$\sqrt{10}$	$10^{\frac{1}{2}}$	$\log 0,5 = -0,30$
$0,01$	10^{-2}	$\log 0,01 = -2$
1	10^0	$\log = 1$
0,1	10^{-1}	$\log = -0,1$
0,001	10^{-3}	$\log 10^{-3} = -3$
0,0004	10^{-4}	$\log = -0,4$
-10	não existe	$\log = n.e$
0	não existe	$\log = n.e$

Figura 91 - Protocolo da dupla D3 - Sessão III.

Ao analisarmos a tabela não observamos muitas dificuldades, a dupla D3 disse que achou estranho não existir logaritmos de números negativos, percebemos que houve mais erros na escrita logarítmica, pois quando $10^{\frac{1}{2}}$, escreveu o log de 0,5 e não o $\log \sqrt{10} = 0,5$ e quando $N = 0,0004$ a dupla D3 relacionou o último algarismo com o expoente na forma de potência. Nessa atividade não houve necessidade de fazer conversão de registro, apenas a mudança de representação em um mesmo registro numérico e a alternância entre essas representações.

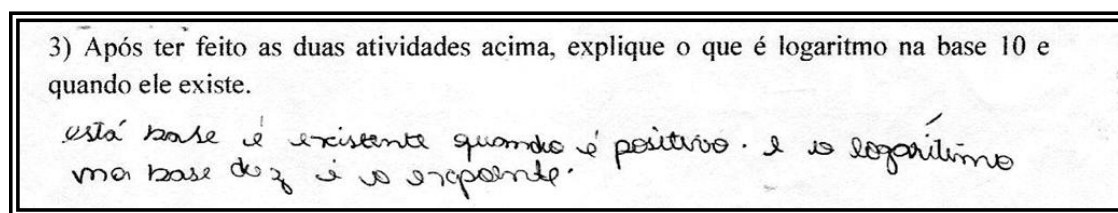


Figura 92 - Protocolo da dupla D3 - Sessão III.

Analisando a resposta registrada no protocolo da dupla D3, há indícios que essa dupla compreendeu o conceito de logaritmo na base dez e a condição de existência. O registro utilizado pela dupla D3 foi o registro da língua natural, e podemos citar como processos do Pensamento Matemático Avançado, a observação, mudança de representação, testar hipóteses e a generalização.

A dupla D3 não apresentou dificuldade para resolver a questão acima. A dupla realizou um tratamento no registro numérico, e o processo do Pensamento Matemático Avançado presente é o da observação.

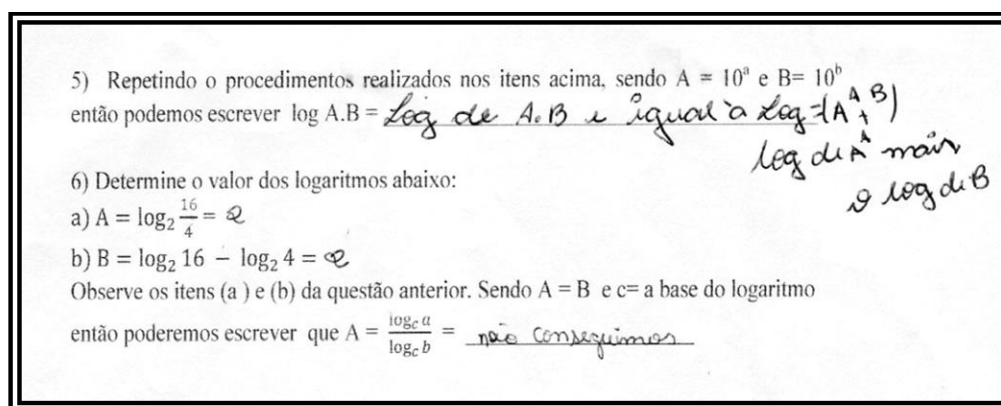


Figura 93 - Protocolo da dupla D3 - Sessão III.

Ao analisarmos o protocolo acima, percebemos a dificuldade da dupla em registrar as suas conclusões no registro algébrico. Não conseguiram relacionar a questão (4) para generalizar que $\frac{\log_c a}{\log_c b} = \log_c a - \log_c b$ como previmos em nossas análises *a priori*.

7) Dada a expressão $M = \log_2 7^3$ escreva

a) como um produto de logaritmos em fatores iguais.
 $\log_2 7 \cdot 7 \cdot 7$

b) Agora, transforme o produto encontrado na questão anterior em soma de 3 parcelas. Chamando de N a expressão que você encontrou
 $N = \log_2 7 + \log_2 7 + \log_2 7 \Rightarrow N = 3 \log_2 7$

c) Podemos dizer que $N = M$?
Sim, porque as duas são iguais só muda a forma de representar.

d) Observe os itens (a), (b) e (c) então podemos escrever que se o $\log_a M^N =$
 $N \cdot \log_a M$

Figura 94 - Protocolo da dupla D3 - Sessão III.

O protocolo da dupla D3 (Figura 94) aponta uma progressão em relação à questão anterior, pois a dupla realizou o tratamento no registro algébrico e por meio da observação chegou à generalização da propriedade dos logaritmos no registro algébrico. Ressaltamos que não houve intervenção de nossa parte para ajudá-la.

8) Complete a tabela:

Equação na forma Exponencial	Equação na forma Logarítmica	Cálculo do Logaritmo
$2^x = 8$	$\log_2 8 = x$	$x = 3$
$5^x = 125$	$\log_5 125 = x$	$x = 3$
$10^x = 30$	$\log_{10} 30 = x$ ou $\log 30 = x$	$x = 1,47$
$2^x = 32$	$\log_2 32 = x$	$x = 5$
$3^x = 243$	$\log_3 243 = x$	$x = 5$
$10^x = 50$	$\log_{10} 50 = x$	$x = 1,69$
$10^x = 0,98$	$\log 0,98 = x$	$x = -0,008$
$10^x = 950$	$\log 950 = x$	$x = 2,97$
$10^x = 15000$	$\log 15000 = x$	$x = 4,17$

Figura 95 - Protocolo da dupla D3 - Sessão III.

Não percebemos dificuldades no preenchimento da tabela, acreditamos que o uso da calculadora científica deve ter ajudado nos cálculos em que os

logaritmos são números decimais. Por meio desta atividade, percebemos que esta dupla realizou a escrita logarítmica e a escrita na forma exponencial corretamente. Podemos perceber a relação entre o Pensamento Reverso nesta atividade, pois as duplas teriam que pensar “ao contrário” perceber que o procedimento para o registro da escrita na forma exponencial é o inverso do registro da escrita logarítmica.

Não responderam a questão 9, pois tinham um compromisso e saíram mais cedo que os demais colegas.

A dupla D3 relatou que achou a Sessão III “muito difícil”, mas que aprendeu um pouco mais sobre os logaritmos. As dificuldades relatadas pela dupla foram em fazer suas justificativas no registro da língua natural.

Na Sessão III, ao observarmos o comportamento das duplas frente às questões, suas discussões e seus registros, percebemos que houve muita dificuldade em relação ao tratamento no registro numérico, além das dificuldades em interpretar os enunciados. Contudo, percebemos que as duplas conseguiram generalizar as propriedades dos logaritmos e relataram que de fato, fazer operações com a soma e subtração de logaritmos é muito mais fácil do que utilizar a multiplicação e divisão. Relataram que o matemático Napier foi fantástico em sua invenção.

4.5.3.4. Síntese da Análise dos resultados *a posteriori* da Sessão III

Ao propor a Sessão III nosso objetivo foi apresentar situações-problema que necessitam utilizar conhecimentos sobre função exponencial e logaritmos para encontrar a solução. Como já relatamos as duplas não conheciam os logaritmos e após a realização das atividades propostas nesta Sessão conheceram uma das invenções que revolucionaram a comunidade científica segundo Eves (2008).

A seguir apresentaremos o quadro síntese dos resultados de nossa análise *a posteriori* da Sessão III:

Sessão III	Síntese dos Resultados		
	D1	D2	D3
Dificuldades encontradas	Transformação da equação logarítmica para a equação exponencial.	Interpretação de enunciado, reconhecer a variável t como variável dependente.	Conversão do registro numérico para o registro algébrico para generalizar uma das propriedades dos logaritmos, interpretação dos enunciados e registrar os resultados.
Estratégia de Resolução	O uso da calculadora científica para testar suas conjecturas.	Transformação dos dados em potência de base 10, uso da estratégia de tentativa e erros.	Estratégia da tentativa e erro, e o uso da calculadora científica para testar os resultados.
Aprendizagem e ou abstração dos conceitos	Aplicação da função exponencial em situação-problema. Compreensão sobre as restrições para a condição de existência de logaritmos.	Compreensão do logaritmo como um expoente, propriedades dos logaritmos.	Compreensão do logaritmo como um expoente.
Conversão de registros	Conversão do registro na língua natural para o registro algébrico e numérico.	Conversão do registro na língua natural para o registro algébrico e numérico.	Conversão do registro na língua natural para o registro algébrico e numérico.
Tratamento registros	Tratamento no registro algébrico e numérico.	Tratamento no registro algébrico e numérico.	Tratamento no registro algébrico e numérico.
Processos do PMA envolvidos	Observação, mudança de representação, visualização, levantamento de conjecturas.	Observação, mudança de representação, visualização.	Observação, mudança de representação, visualização, mudança de representação.

Figura 96 - Síntese dos Resultados da análise *a posteriori* da Sessão III.

As dificuldades das duplas ficaram explícitas em transformar a escrita na forma de potência para a forma logarítmica.

Observamos que as três duplas compreenderam os logaritmos como um expoente de uma potência. O uso da calculadora científica nesta Sessão foi uma

estratégia importante, pois as duplas utilizavam a calculadora como uma forma de verificar suas conjecturas e testar suas hipóteses.

4.5.4. Análise *a posteriori* da Sessão IV

A Sessão IV foi realizada com o auxílio do *software* GeoGebra. Nosso objetivo foi explorar a visualização do gráfico de funções no registro gráfico, e o conceito de função inversa para que ao final da Sessão, os alunos possam concluir que a função logarítmica é a inversa da função exponencial.

4.5.4.1 Análise do protocolo da dupla D1

A estratégia que a dupla D1 utilizou para encontrar a expressão algébrica foi diferente. Ao utilizar o *software* GeoGebra, digitaram várias funções tais como $f(x) = x^2$, $g(x) = x$ e $h(x) = x^3$ e percebeu que para encontrar o gráfico das funções da primeira questão, que é uma reta, teria que ter um expoente 1.

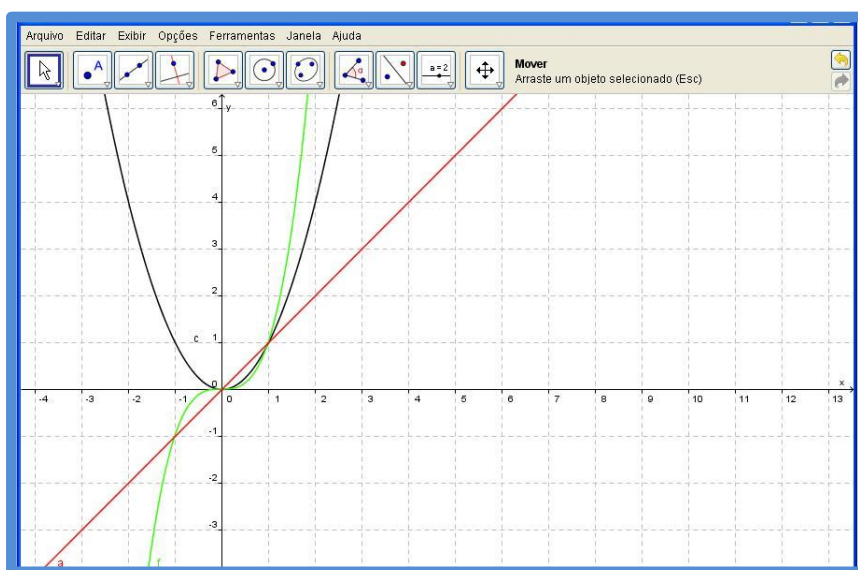


Figura 97 - Protocolo da dupla D1 - Sessão IV.

Por meio da estratégia utilizada, podemos observar que o processo de visualização que o *software* proporciona, possibilita ao estudante uma forma de observar relações, que neste caso dependendo do expoente da variável, o gráfico

muda. Podemos dizer que houve uma conversão do registro gráfico para o registro algébrico.

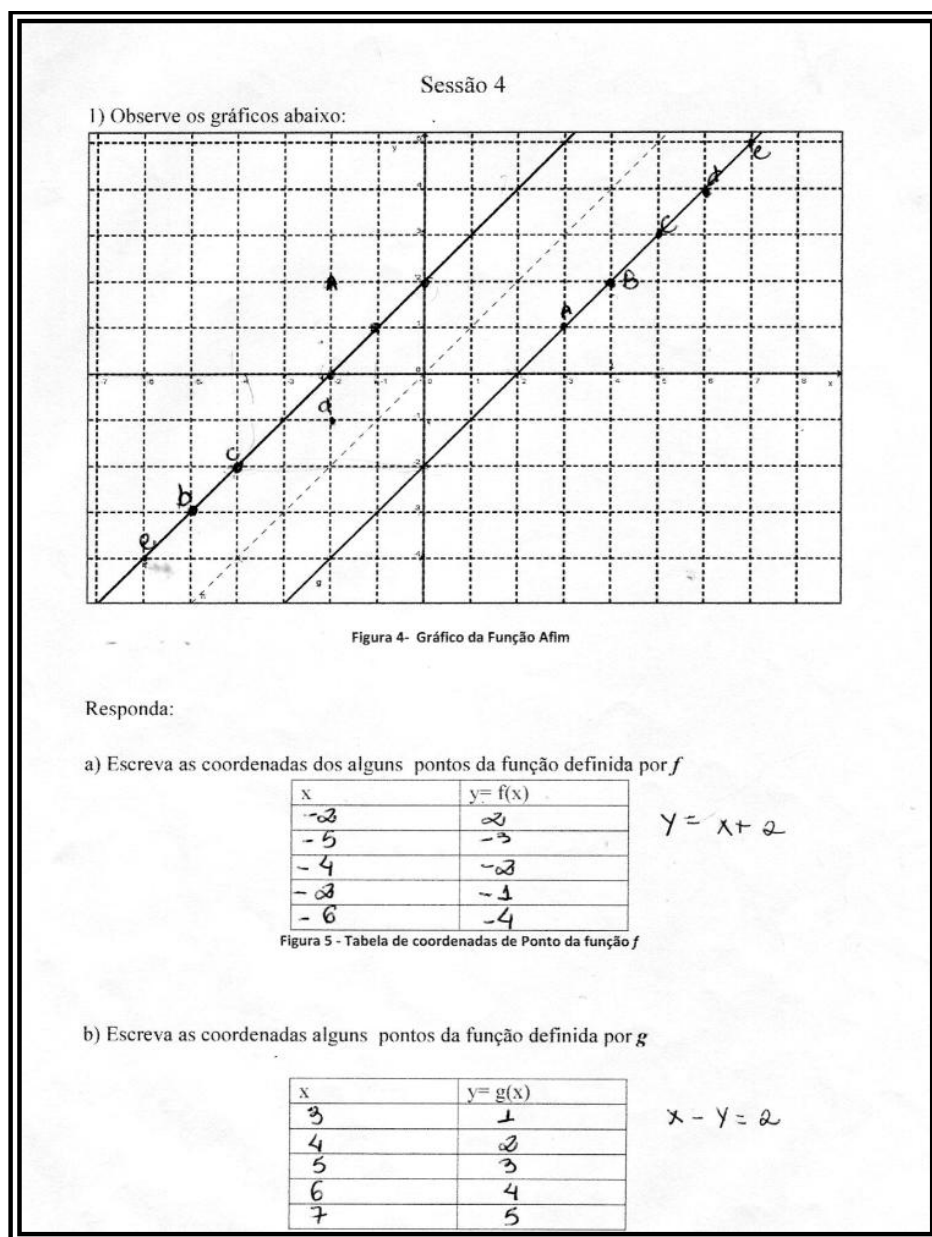


Figura 98 - Protocolo da dupla D1 - Sessão IV.

Após várias tentativas chegou às expressões algébricas que representavam o gráfico. Para completar a tabela escreveu vários pontos ao longo das retas e conseguiu completar a tabela.

c) Observe e compare os valores das coordenadas dos pontos da função $y=f(x)$ e $y=g(x)$, qual suas conclusões?

Que são contrária enquanto uma soma a outra subtrai.

d) A função que está pontilhada no gráfico é definida por $y=x$, a partir desta função, quais são as respectivas leis das funções f e g ?

$f \quad Y = x + 2 \quad g \quad x - y = 2$

e) Se (a, b) pertence ao gráfico de f , então (b, a) pertence ao gráfico f' (notação de função inversa). Essa afirmação é válida para as funções f e g apresentadas no gráfico?

Essa afirmação é positivo.

f) O que você entende por esta afirmação: "A reta $y=x$ é chamada de bissetriz dos quadrantes ímpares, e os gráficos das funções f e g são simétricos em relação ao eixo à reta $y=x$ ". Podemos dizer que as duas funções f e g inversas? Sim.

Figura 99 - Protocolo da dupla D1 - Sessão IV.

2) a) Construa a função $f(x) = \log_2 x$ e escreva na tabela abaixo alguns pontos assinalados no gráfico abaixo:

x	y = f(x)
1	0
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6

Figura 7- Tabela de coordenadas de ponto da função definida por f

b) Construa o gráfico da função $g(x) = 2^x$ e escreva alguns pontos assinalados no gráfico na tabela abaixo:

x	y = g(x)
0	1
2	4
4	16
8	256
16	65536

Figura 8- Tabela de coordenadas de ponto da função definida por g

Figura 100 - Protocolo da dupla D1 - Sessão IV.

Com relação ao conceito da função inversa, não foi possível saber se foi abstraído pela dupla D1, o registro em seu protocolo ficou em branco. Não sabemos se foi por esquecimento, ou por não saber explicar. Mas por meio do áudio, observamos que o **aluno R** disse: "Bem, as funções log e exponenciais são

inversas, porque os valores do x de uma função é o y da outra função". Como relatamos anteriormente, essa dupla D1 interagiu muito, e teve dificuldade em justificar suas respostas por meio do registro em língua natural.

4.5.4.2. Análise do protocolo da dupla D2

A princípio a dupla D2 não compreendeu o que foi pedido no item (a), e pediu-nos um auxílio, explicamos que deveriam procurar algumas coordenadas da função f e completar a tabela.

a) Escreva as coordenadas dos alguns pontos da função definida por f

x	y = f(x)
-3	-1
3	4
1	3
-6	-4
-4	-2

Figura 5 - Tabela de coordenadas de Ponto da função f

b) Escreva as coordenadas alguns pontos da função definida por g

x	y = g(x)
-2	-4
1	-1
3	1
5	3
6	4

Figura 101 - Protocolo da dupla D2 - Sessão IV.

A dupla D2 completou a tabela sem o uso do *software* GeoGebra. Pedimos às alunas que executassem o *software* GeoGebra e construíssem o gráfico das funções referentes à questão 1.

A dupla D2 achou difícil, pois não sabiam qual expressão algébrica deveriam digitar na janela do GeoGebra para encontrar uma expressão que representasse os gráficos das funções que constavam na primeira questão.

A **aluna F** disse: “Acho que isso deve estar relacionado com equação da reta” então vamos tentar digitar: $y = 2x$, $2x + 1$, $-2x + 1$.

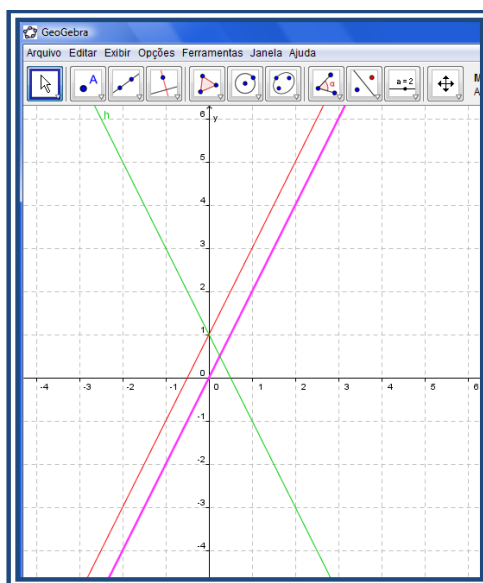


Figura 102 - Protocolo da dupla D2 – Sessão IV.

A **aluna H** disse: “Se observarmos as retas estão passando pelo $y = 1$ na forma crescente e decrescente. Então vamos digitar alguma coisa que o x tem que ser igual a 2, bem, vamos digitar $1x$ para ver. E escreveu: $f(x) = x$, $g(x) = x + 1$, $h(x) = x - 1$ ”.

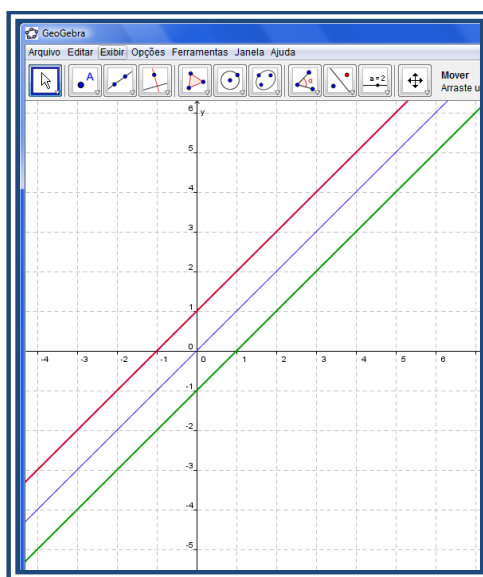


Figura 103 - Protocolo da dupla D2 - Sessão IV.

A **aluna F** disse: “Olha só, a reta está passando no eixo do x , então quando digitamos $f(x) = x$, $g(x) = x + 1$, e $g(x) = x - 1$, isso quer dizer que o $+1$, e o -1 , são os valores em que a reta corta no eixo do x e no caso da atividade 1, as retas cortam nos valores que $x = 2$, $x = 0$, e $x = -2$ ”.

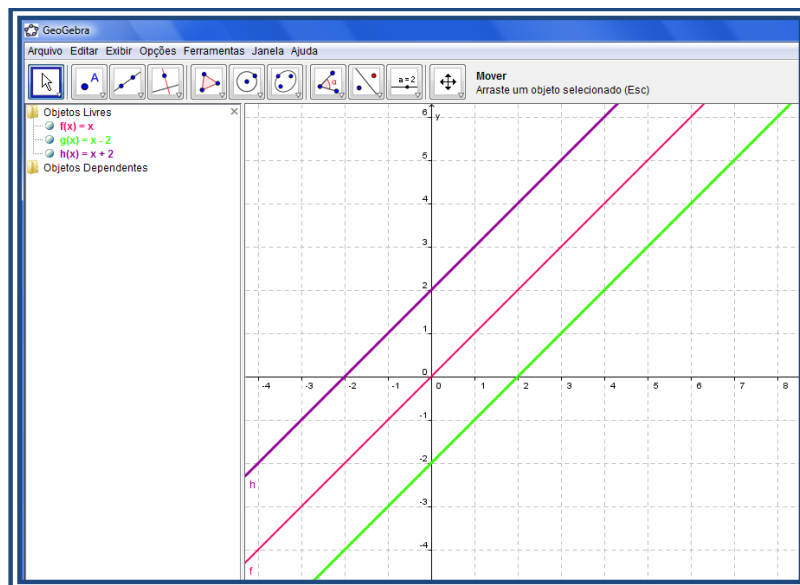


Figura 104 - Protocolo da dupla D1 - Sessão IV.

A aluna H disse: “Ah! Finalmente conseguimos! Isso é muito difícil, mas esse GeoGebra ajuda muito, porque não precisamos desenhar gráfico, pois o processo é demorado”. Depois que elas digitaram as expressões algébricas das funções na janela de entrada, pedi para que abrir o menu **ferramentas** e habilitar a opção **janela de Álgebra**, para aparecer a expressão algébrica.

c) Observe e compare os valores das coordenadas dos pontos da função $y=f(x)$ e $y=g(x)$, qual suas conclusões?

que f e g tem os mesmos pontos mais em locais opostos.

d) A função que está pontilhada no gráfico é definida por $y=x$, a partir desta função, quais são as respectivas leis das funções f e g ?

*$x-2=g$
 $x+2=f$ } são as mesmas funções e são mais opostos.*

e) Se (a, b) pertence ao gráfico de f , então (b,a) pertence ao gráfico f^{-1} (notação de função inversa). Essa afirmação é válida para as funções f e g apresentadas no gráfico?

Sim é válida sim. O método que eu usei foi os pontos do gráfico para visualizar as coordenadas (A,b). Ponto A = (-2,0) $f=g(2,0)$ / $B(3,1) f=g(3,1)$.

f) O que você entende por esta afirmação: “A reta $y=x$ é chamada de bissetriz dos quadrantes ímpares, e os gráficos das funções f e g são simétricos em relação ao eixo à reta $y=x$ ”. Podemos dizer que as duas funções f e g inversas?

Sim porque são bissetriz e divididas em dois ângulos iguais.

Figura 105 - Protocolo da dupla D2 - Sessão IV.

Ao analisarmos o diálogo entre a dupla D2 e também os seus protocolos, observamos que, inicialmente, sentiram dificuldades para fazer a conversão do registro gráfico para o registro algébrico. Essa atividade é um fenômeno de não congruência, pois o processo algébrico para fazer essa conversão não é tão simples. Duval afirma que:

Geralmente, no ensino, um sentido de conversão é privilegiado, pela ideia de treinamento, num sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido. Os exemplos propostos aos alunos são intuitivamente escolhidos, evidentemente, nos casos de congruência. Infelizmente esses não são os casos mais frequentes (DUVAL, 2003, p. 20).

Segundo Brolezzi e Barufi (2007), no Ensino Médio o estudo de algumas funções elementares se restringe apenas à expressão algébrica, a mudança de registro é feita apenas em um único sentido e dificilmente é dado o gráfico de uma função para encontrar a sua expressão algébrica.

Acreditamos que essa abordagem em um único sentido pode ser um fator que pode causar dificuldades na abstração do conceito de uma função por meio de outras representações.

Os processos do Pensamento Matemático Avançado, que podemos destacar nesta atividade, foi o processo de visualização, mudança de representação, elaborar e testar conjecturas e a generalização. Segundo Dreyfus, o uso do computador pode facilitar o desenvolvimento desses processos para que ocorra a aprendizagem.

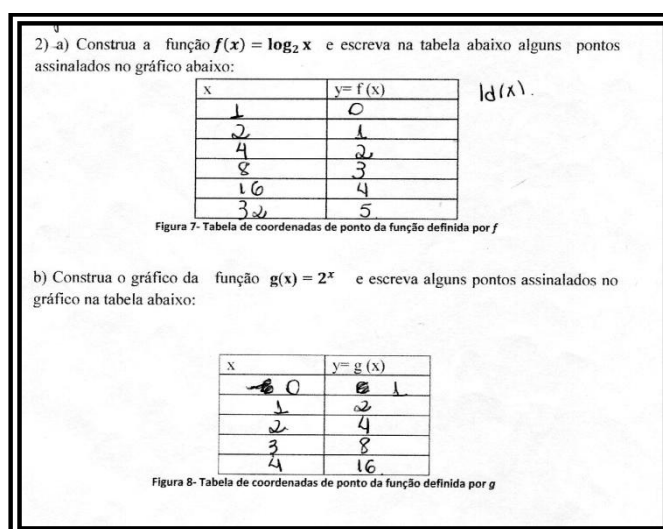


Figura 106 - Protocolo da dupla D2 - Sessão IV.

Em nossa análise *a priori*, prevíamos que os alunos observassem por meio da tabela que se os pares ordenados (a, b) da tabela referente pertencem à função f definida por $f(x) = \log_2 x$ são os mesmos (b, a) que pertencem a função g definida por $g(x) = 2^x$ e portanto são funções inversas. Essa característica de “Pensar ao contrário” não é automático [...]. (BROLEZI; BARUFI, 2007 p. 28)

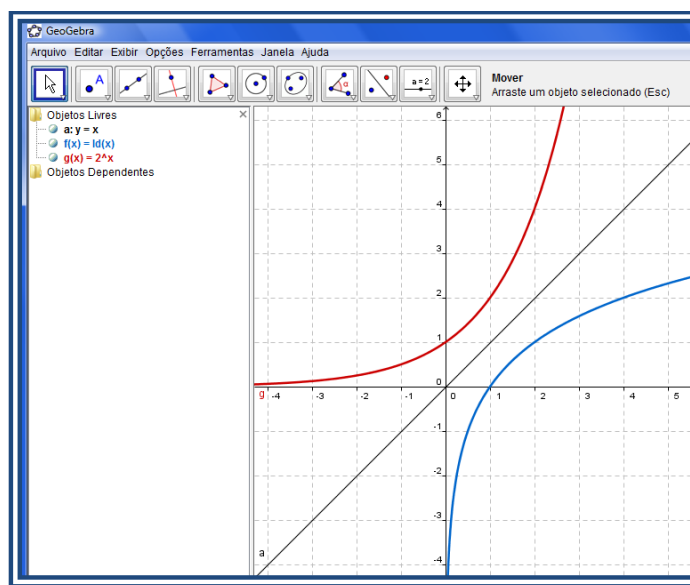


Figura 107 - Protocolo da dupla D2 - Sessão IV.

E desta forma a dupla D2 não percebeu inicialmente, mas a abstração do conceito da função inversa tornou-se possível quando utilizou o *software* GeoGebra pois digitou duas funções na janela de entrada do *software* em um mesmo sistema cartesiano e concluiu que uma função é inversa da outra.

4.5.4.3. Análise do protocolo da dupla D3

Assim, como a dupla D1, para completar a tabela, a dupla D3 também escreveu pontos que pertenciam às retas definidas pelas funções f e g e não encontraram dificuldades para resolver os itens (a) e (b).

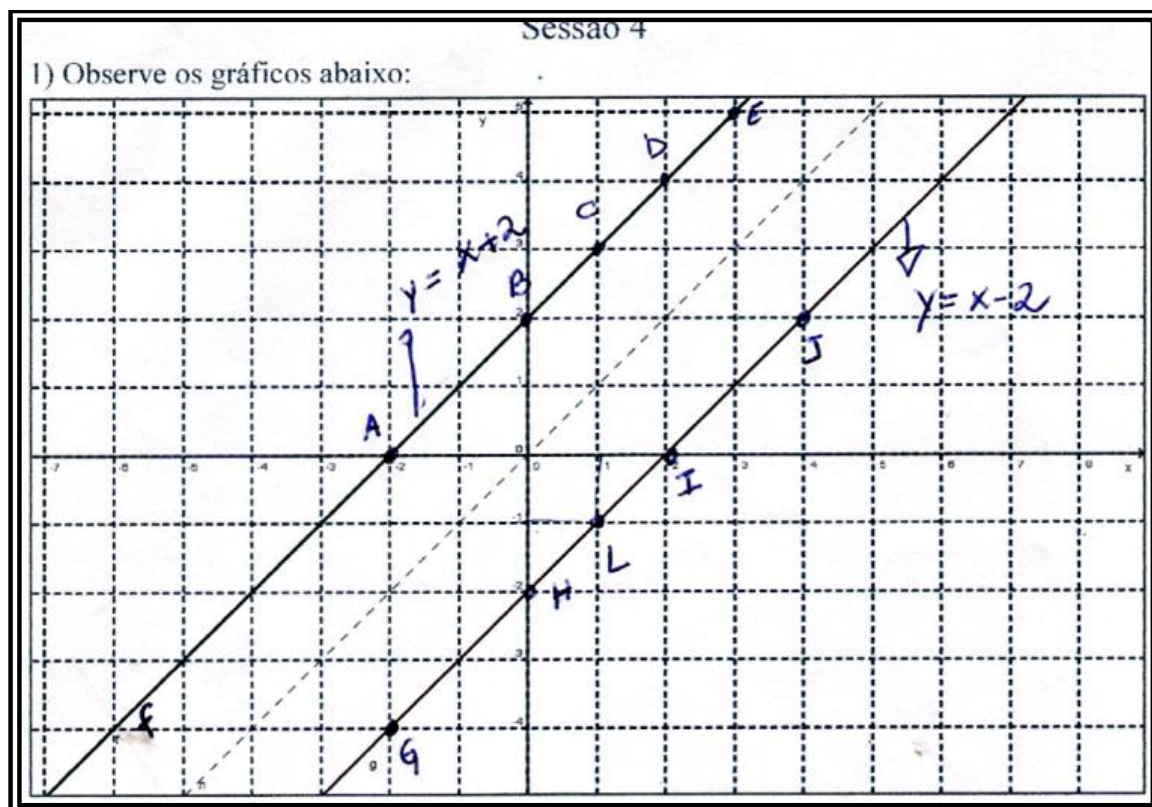


Figura 108 - Protocolo da dupla D3 - Sessão IV.

Para encontrar a expressão algébrica das respectivas funções, utilizou o cálculo de Determinantes e facilmente encontrou a expressão $y = x + 2$ e $y = x - 2$. Deste modo, podemos dizer que esta dupla D3, fez a conversão no registro gráfico para o registro algébrico. Não previmos em nossa análise *a priori*, o uso dos conhecimentos referentes à Geometria Analítica para resolver as questões, pois acreditávamos que o fato dos alunos observarem os pares ordenados nas tabelas, seria o suficiente para concluírem que as funções definidas por f e g são inversas.

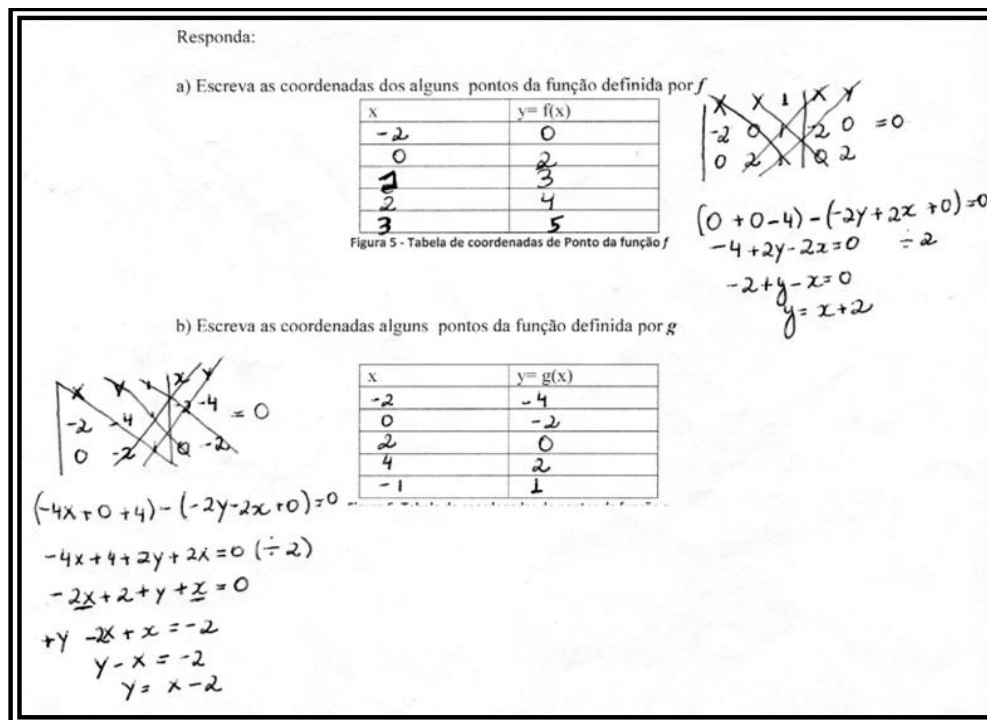


Figura 109 - Protocolo da dupla D3 - Sessão IV.

No caso da dupla D3, a estratégia utilizada pela dupla, levou-nos a ter como hipótese o fato de os alunos estarem estudando conceitos da Geometria Analítica na época da aplicação desta atividade, a dupla observou que seria possível encontrar a equação da reta para a solução da primeira questão.

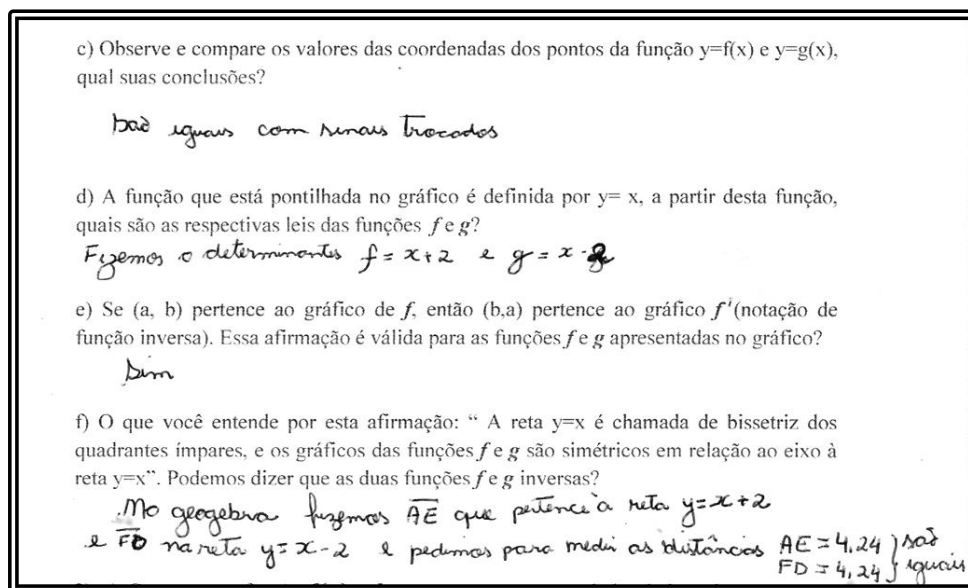


Figura 110 - Protocolo da dupla D3 - Sessão IV.

Ao utilizar o *software* GeoGebra, a estratégia utilizada para verificar se as funções f e g são inversas foi o recurso da Geometria, como também para justificar as suas conclusões. Podemos verificar que houve uma conversão do registro gráfico para o registro figural.

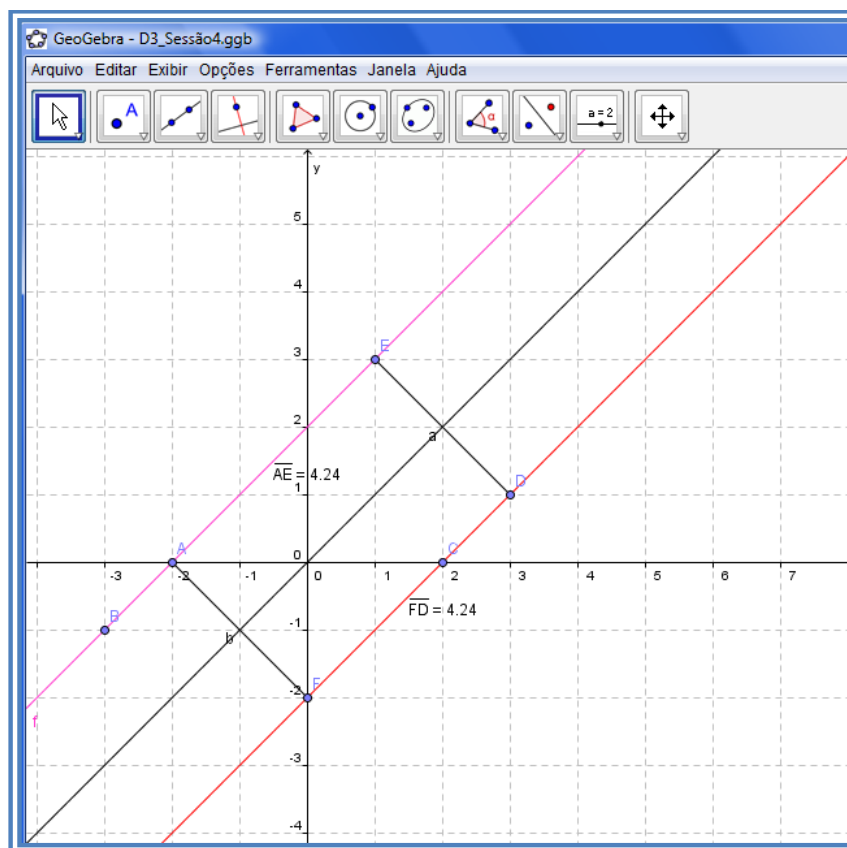


Figura 111 - Protocolo da dupla D3 - Sessão IV.

Para fazer a justificativa, utilizou o recurso da Geometria Plana; podemos visualizar em um retângulo $AEFD$ que a distância entre AE e FD são iguais e a reta $y = x$ intercepta AF e ED em pontos médios de AF e ED , portanto possuem mesma distância e desta forma concluíram que são inversas. Os processos do Pensamento Matemático Avançado envolvidos foram o da visualização, observação e a generalização.

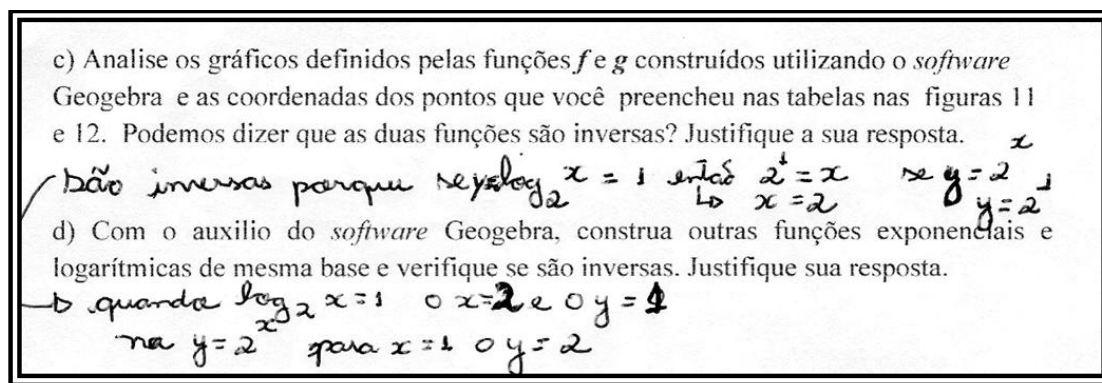


Figura 112 - Protocolo da dupla D3 - Sessão IV.

Ao analisarmos o protocolo acima, podemos concluir que a dupla D3 relacionou a função logarítmica como a inversa da função exponencial, e para isso fez a conversão do registro gráfico para o algébrico e comparou as coordenadas das funções f definidas por $f(x) = \log_2 x$ para $f(2) = 1$ e para a função g definida $g(x) = 2^x$ quando $g(1) = 2$. Portanto a função f terá um ponto como coordenada (2,1) e no segundo caso terá como coordenada (1,2), concluindo então que são funções inversas.

Podemos observar os processos do Pensamento Matemático Avançado como a visualização, comparação e a generalização.

4.5.4.4. Síntese da Análise *a posteriori* da Sessão IV

Nosso propósito na Sessão IV foi explorar por meio do registro de partida, a representação no registro gráfico das funções, explorar os conceitos de simetria e função inversa para que os alunos pudessem concluir que a função logarítmica é a inversa da função exponencial.

A seguir apresentamos o quadro síntese de nossa análise *a posteriori* da Sessão IV:

Sessão IV	Síntese dos Resultados		
	D1	D2	D3
Dificuldades Encontradas	Registro de suas conclusões no registro na língua natural.	Interpretação dos enunciados, conversão do registro gráfico para o registro algébrico.	Registro de suas conclusões no registro na língua natural.
Estratégia de Resolução	Relação do expoente da variável da função para comparar com a forma do gráfico.	Uso do <i>software</i> GeoGebra, visualização das coordenadas do gráfico para encontrar as expressões algébricas correspondentes.	Uso do <i>software</i> GeoGebra.
Aprendizagem e ou abstração dos conceitos	Compreensão da função logarítmica como uma função inversa da função exponencial.	Relação com outros conteúdos estudados como equações da reta e seus coeficientes, compreensão da função inversa.	Relação da Geometria Analítica com as atividades propostas.
Conversão de registros	Conversão do registro gráfico para registro de tabela e algébrico.	Conversão do registro gráfico para registro de tabela e algébrico.	Conversão do registro gráfico para o registro de tabela, algébrico e figural.
Tratamento de registros	Tratamento no registro algébrico e numérico.	Tratamento no registro algébrico e numérico.	Tratamento no registro algébrico, aritmético e geométrico.
Processos do PMA envolvidos	Visualização, mudança de representação, observação, generalização.	Visualização, mudança de representação, observação, generalização.	Visualização, mudança de representação, observação, generalização.

Figura 113 - Síntese dos Resultados da análise *a posteriori* da Sessão IV.

Percebemos que as três duplas conseguiram fazer as atividades com o uso de estratégias diferentes, e não previstas por nossa análise *a priori*. A única dupla

que relacionou as coordenadas dos pontos de uma função, com as coordenada da sua inversa, foi a dupla D3. Este fato ocorreu apenas quando estiveram observando o comportamento da função logarítmica e a exponencial que foi a estratégia esperada em nossa análise *a priori*.

Contudo, acreditamos que nosso objetivo foi alcançado, pois gostaríamos de mostrar que a função logarítmica é a inversa da exponencial e todas as duplas demonstraram ter abstraído essa noção, entretanto, sabemos que o conceito de função inversa é um conteúdo complexo e deve ser mais explorado ao longo do Ensino Médio, priorizando a conversão entre os registros de representação.

Capítulo V

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve como objetivo elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática para o ensino de função logarítmica utilizando o *software* GeoGebra. Esse objetivo surgiu a partir das reflexões sobre a relevância do Estudo de Funções que permeia a trajetória dos estudantes durante a Educação Básica e no entanto existem muitos problemas de ensino e aprendizagem deste tema conforme resultados de pesquisas realizados por Bianchini e Puga (2006) e Nasser (2009).

O estudo das Funções é um campo amplo e para a delimitação do tema, escolhemos a função logarítmica como objeto de estudo. As nossas questões de pesquisa que nortearam o desenvolvimento desta pesquisa, foram: 1) Os alunos com a sequência didática proposta neste trabalho conseguem reconhecer alguns elementos fundamentais para o estudo da função logarítmica, tais como domínio, imagem e o esboço do gráfico? Em que medida? Quais as dificuldades encontradas? Quais avanços percebidos? 2) O uso do *software* GeoGebra como estratégia didático-pedagógica no estudo das funções exponenciais e logarítmicas contribuiu ou não para a aprendizagem dos alunos?

Em busca de caminhos que pudessem ajudar a responder essas questões, utilizamos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica descrita por Duval.

Para a construção da sequência procuramos escolher atividades que contemplassem a articulação de mais de um registro de representação semiótica.

O conteúdo de uma depende mais do registro de representação do que do objeto representado. Porque passar de um registro de representação a outro não é somente mudar de modo de tratamento, é também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto. Vemos, então, que duas representações de um mesmo objeto, produzidas em dois registros diferentes, não têm de forma alguma o mesmo conteúdo (DUVAL, 2003, p. 22).

Concordamos com Duval (2003) que a compreensão matemática está intimamente ligada ao fato de dispor de ao menos dois registros de representação

diferentes. E a articulação desses registros constitui uma condição de acesso à compreensão em matemática.

Entendemos que o professor de Matemática, ao propor atividades aos seus alunos necessita ter conhecimentos de quais processos cognitivos podem favorecer a aprendizagem, e como apresentar aos estudantes conteúdos matemáticos que possibilitem o desenvolvimento desses processos e contribuam com a aprendizagem. Procuramos propor atividades que possibilitassem o desenvolvimento dos Processos do Pensamento Matemático Avançado à luz de Dreyfus (1991)

O autor afirma que tais processos não estão presentes apenas na Matemática Avançada. Muito desses processos já estão presentes no pensamento da criança sobre conceitos matemáticos elementares. Dreyfus salienta que:

Uma característica distintiva entre o Pensamento Avançado e o Elementar é a complexidade e como se lida com eles. Os conceitos avançados, como anéis e grupos de Lie, são provavelmente muito complexos. A distinção está em como essa complexidade é gerenciada. Os processos mais poderosos são aqueles que permitem desenvolver a capacidade de abstrair e representar. Por meio de abstrações e representações, pode-se mover de um nível de detalhe a outro e assim gerenciar a complexidade²⁰. (DREYFUS, 1991, p. 26 tradução nossa)

A coordenação entre os registros de representação semiótica e a possibilidade de propor atividades que favoreçam os processos do Pensamento Matemático Avançado como: generalização, representação e abstração, bem como, as escolhas das atividades, o uso das tecnologias como estratégia didático-pedagógica contribuíram para a construção da sequência didática e à análise dos resultados.

Para tanto foi utilizada como referência para a escolha das atividades que integrou a nossa sequência algumas Situações de Aprendizagens apresentadas no Caderno do Professor de Matemática do 1º ano do Ensino Médio volume 3

²⁰ One distinctive feature between advanced and elementary thinking is complexity and how it is dealt with. Advanced concepts, such as rings or Lie groups, are likely to be very complex. The distinction is in how this complexity is managed. The powerful processes are those that allow one to do this, in particular abstracting and representing. By means of abstracting and representing, one can move from one level of detail to another and thus manage the complexity.

(SÃO PAULO, 2009). Embora haja clareza de que os autores não possuem a obrigação de propor atividades que favoreçam a mudança de registro de representação semiótica, fizemos algumas alterações que julgamos necessárias para que tais atividades possibilitassem as mudanças de registros.

Este material foi distribuído aos professores pela Secretaria Estadual da Educação do Estado de São Paulo e foi implementado no ano de 2008. É norteado pela Proposta Curricular do Estado de São Paulo com objetivo de unificar os conteúdos a serem trabalhados por todos os professores da rede estadual e faz parte integrante do projeto “São Paulo Faz Escola”. Neste contexto obedecemos à sequência de conteúdos proposta pelos autores do documento, ou seja, iniciamos o estudo por meio da potência e função exponencial, estudo dos logaritmos como um expoente e finalmente a função logarítmica como a inversa da função exponencial.

A organização da nossa pesquisa foi norteada pelos pressupostos da Engenharia Didática (ARTIGUE; DOUADY; MORENO, 1995). Tal metodologia tem quatro fases, a fase preliminar em que fizemos o levantamento da literatura, leitura dos documentos oficiais, sondagem dos conhecimentos prévios dos alunos que participaram da pesquisa. Como análise *a priori*, fizemos um estudo das possíveis estratégias de solução que os alunos poderiam utilizar e dificuldades que poderiam aparecer. Realizamos a fase da aplicação, e confrontamos os resultados das análises *a posteriori* com a análise *a priori*.

Inicialmente fizemos um levantamento das pesquisas realizadas sobre função logarítmica, e segundo Ardenghi (2005), existem várias produções acadêmicas no que diz respeito aos conceitos iniciais de função, função afim e função quadrática.

De fato, foi constatado pelas pesquisadoras Bianchini e Puga (2006) e Nasser (2009), que embora o estudo das funções seja um tópico muito abordado no Ensino Médio, os estudantes chegam à Universidade sem compreender os conceitos básicos das funções como domínio, imagem, além de reconhecerem no registro gráfico apenas funções definidas por retas e parábolas.

O ensino da função logarítmica muitas vezes é deixado de ser ensinado no Ensino Médio pelo fato de não ter tempo suficiente durante o ano letivo ou motivos diversos. Tal fato foi constatado nas pesquisas de Karrer (1999), Ferreira (2006), Saldanha (2007) e Lima (2009).

As dificuldades de aprendizagem pelos alunos, apontadas pelos pesquisadores citados acima foram semelhantes aos nossos resultados. Podemos elencar algumas delas: uso das propriedades das potências, tratamento no registro algébrico e numérico das equações exponenciais e logarítmicas, interpretação de situações-problema e reconhecimento de uma função logarítmica no registro gráfico como registro de partida.

Em relação aos documentos oficiais que fizemos a leitura, estes sugerem que o ensino da função logarítmica seja apresentado como a função inversa da exponencial, e possibilite aos alunos uma discussão das características destes modelos exponenciais e logaritmos, o crescimento apresenta uma taxa de variação que depende do valor da função em cada instante. Não é recomendado o trabalho exaustivo dos logaritmos e das equações exponenciais. É proposto o trabalho com situação-problema de aplicação em outras áreas do conhecimento, como a Química, Física, Matemática Financeira (BRASIL, 2006).

Participaram da nossa pesquisa 6 alunos do 3º ano do Ensino Médio que realizaram seus trabalhos em duplas que denominamos dupla D1, D2 e D3. A sequência didática foi organizada em quatro sessões que duraram 8 encontros.

Durante os encontros observou-se que os alunos estiveram motivados e foram responsáveis, porque se mostraram assíduos no período em que realizamos as sessões, pois como já relatamos, esses encontros aconteceram fora do período de aula. Perguntamos a esses alunos o que os motivou a participar dos encontros e todos enfatizaram que era mais uma oportunidade de aprendizado, e muitas vezes durante as aulas devido ao grande número de alunos fica mais difícil de realizar discussões e, de fato, aprender matemática.

Em relação à nossa primeira questão de pesquisa, percebemos que inicialmente os alunos desconheciam noções sobre domínio, imagem de uma função e relataram que só haviam estudado as funções afim e quadrática. No

decorrer das sessões percebemos que as duplas foram evoluindo, as discussões entre as duplas favoreceram o levantamento de hipóteses sobre o comportamento do gráfico da função, do domínio e da imagem. No protocolo da dupla D1, percebemos que a ela compreendeu o conceito de domínio e imagem da função.

A dupla D1 ressaltou a importância da visualização para a compreensão deste conceito, pois as duplas relataram que quando estavam no 1º ano do Ensino Médio não entendiam o que era “explicitar o domínio de uma função, caso ele exista”, segundo estes alunos, as perguntas eram feitas apenas por meio de expressões algébricas.

Acreditamos que a partir do momento que usamos a calculadora científica para testar hipóteses e utilizamos o *software* GeoGebra facilitou a compreensão desses conceitos.

O uso do *software* GeoGebra como uma estratégia didático-pedagógica contribuiu para a aprendizagem destes alunos. Todas as duplas destacaram a importância da visualização do gráfico da função no *software*, além da possibilidade de testar outras funções de modo dinâmico e rápido.

Na Sessão IV a **aluna H** disse: *“Ah! Finalmente conseguimos! Isso é muito difícil, mas esse GeoGebra ajuda muito, porque não precisamos desenhar gráfico, porque processo é demorado”*. (dupla D1)

De modo geral podemos dizer que as principais dificuldades que surgiram foram no tratamento numérico e algébrico, principalmente no momento em que foi solicitado para completar as tabelas, pois eram necessários conhecimentos prévios sobre as propriedades das potências. Esse fato nós já havíamos constatado ao ler as pesquisas realizadas sobre esta temática. Outra dificuldade que podemos ressaltar foi a justificativa no registro da língua natural, a dupla D1 foi muito enfática em dizer que: *“ Nas aulas de matemática em geral, não somos motivados a justificar as nossas conclusões com palavras, mas apenas com números”* (dupla D1).

A dificuldade da conversão do registro gráfico para o registro algébrico foi um fator importante. Esse fato se deve à heterogeneidade dos dois sentidos de conversão. Duval afirma que nem sempre a conversão acontece quando se

invertem os registros de partida e de chegada. “*O que parece conduzir contrastes muito fortes de acerto quando se inverte o sentido de conversão*” (DUVAL, 2003) e salienta que:

Geralmente no ensino, um sentido de conversão é privilegiado, pela ideia de que o treinamento efetuado num sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido. Os exemplos propostos aos alunos são instintivamente escolhidos, evidentemente nos casos de congruência. (DUVAL, 2003, p.20).

Percebemos este fato principalmente na Sessão II, no momento em que foi solicitado para relacionar a expressão algébrica no registro de partida com o registro gráfico no registro de chegada.

Os avanços dos alunos foram claramente destacados na Sessão IV, pois cada dupla utilizou uma estratégia diferente para descobrir a expressão algébrica das funções a partir do registro de partida no registro gráfico e realizaram a conversão do registro gráfico para o registro algébrico.

Essas estratégias nos surpreenderam, pois foi diferente do que previmos em nossas análises *a priori*, esperávamos que os alunos observassem as coordenadas de alguns pontos que pertenciam às retas que propomos e as observassem, para compreender o conceito de função inversa, no entanto, quando os alunos utilizaram o *software* GeoGebra, as estratégias foram diversas, utilizaram recursos de tentativa e erro, recurso da Geometria e o cálculo de Determinantes estudados em Geometria Analítica.

Esses avanços para nós foram de fato relevantes. Pois sabemos que a compreensão da função inversa é complexa e muitas vezes utilizamos apenas o registro algébrico como estratégia de ensino.

Dreyfus defende de que o uso do computador como ambiente de aprendizagem utilizando diferentes representações de um mesmo conceito pode contribuir para estabelecer relações entre elas e ao surgimento de ideias para a formação de conceito que podemos chamar de processos de investigação.

Acrescentamos que o uso da calculadora científica também contribuiu para o desenvolvimento dos processos de investigação, mudança de representação, generalização e abstração.

.Na Sessão III, percebemos que a dupla D1 utilizava a calculadora como ferramenta, pois notamos que não houve conferência dos resultados na tabela anterior. Perguntamos aos alunos como eles usavam a calculadora científica nas aulas, e responderam que era somente para resolver os cálculos, mas nunca retornavam à questão para verificar se o resultado estava correto. Ou seja, a calculadora foi utilizada como ferramenta de validação dos resultados.

Percebemos a falta do uso da calculadora para testar e validar conjecturas e sim, apenas como uma ferramenta sem uma reflexão dos resultados.

Ainda nesta Sessão ao propor uma situação-problema que era necessário o uso dos logaritmos, “qual é o valor do expoente n para que se tenha $10^n = 200$ ”, após longas tentativas de erros e acertos os alunos encontraram o valor do expoente necessário para responder a questão $10^n = 200$. Houve um momento de entusiasmo pelas duplas e acreditamos que situações como esta podem propiciar a aprendizagem por investigação, que é um dos processos do Pensamento Matemático Avançado.

. E quando apresentamos a tecla *log*, disseram: “*Ah professora, essa tecla é fantástica, pois calcula os valores dos expoentes*”. (dupla D1)

A dupla D3 foi testando vários valores na calculadora (utilizaram uma calculadora *on-line*), não usou regra de arredondamento, porque queria saber quantas casas decimais o número poderia ter, e concluiu que “NUNCA” iria ser 200, mas o resultado estava muito próximo. Com relação a tecla *log* disseram ser “*fantástica, pois não precisa ficar testando números*”.

E neste momento relatamos um pouco a história da invenção dos logaritmos e os impactos desta descoberta na sociedade científica da época.

A dupla D3 relatou que achou a Sessão III “muito difícil”, mas que aprendeu um pouco sobre os logaritmos. As dificuldades relatadas pela dupla foram em fazer suas justificativas no registro da língua natural.

Na Sessão III, ao observarmos o comportamento das duplas frente às questões, suas discussões e seus registros, percebemos que houve muita dificuldade em relação ao tratamento no registro numérico, dificuldades em

interpretar os enunciados. Contudo, percebemos que as duplas conseguiram generalizar as propriedades dos logaritmos e relataram que de fato, fazer operações como a soma e subtração de logaritmos é muito mais fácil do que utilizar a multiplicação e divisão. Relataram que o matemático Napier “*foi fantástico em sua invenção*”.

Processos como intuição, observação, investigação, descritos por Dreyfus (1991) ajudaram Napier na invenção dos logaritmos, e outras descobertas por outros cientistas ao longo da história da Matemática.

Como citado na introdução deste trabalho, concordamos com o autor Ávila (2007) o qual sugere que a cada novo tópico a ser ensinado, o professor sempre que possível, justifique a relevância daquilo que se ensina, trazendo frequentemente para suas aulas, histórias, problemas e questões interessantes da história da Matemática, de forma a favorecer ao aluno uma crescente admiração pelo largo alcance da Matemática.

Como uma análise crítica deste trabalho, o nosso objetivo foi o ensino da função logarítmica, e utilizamos a ordem dos conteúdos proposta no Caderno do Professor de Matemática do 1º ano do Ensino Médio volume 3 (SÃO PAULO, 2009).

Notamos que independente dos alunos possuírem conhecimentos sobre potências e a função exponencial, este fato não interferiu nos resultados que apresentamos da Sessão III e Sessão IV em que o nosso foco foi o ensino dos logaritmos. Essa sequência de ensino de apresentar primeiro a função exponencial e depois definir a função logarítmica é uma abordagem que encontramos nos livros didáticos do Ensino Médio, como relataram Karrer (1999), Ferreira (2006), Lima (2009) ao fazer análise de livros didáticos. A impressão que temos é que para aprender função logarítmica, é necessário ter conhecimento prévio da função exponencial e este caminho exige o conhecimento prévio do que seja potência com expoente real qualquer.

Contudo, segundo autores com Maor (2008) e Eves (2008) a invenção dos logaritmos surgiu antes do conceito de função e somente após muito tempo é que

a função logarítmica foi relacionada com a ideia da quadratura da hipérbole e posteriormente com o método de integração.

Voltando a nossa problemática inicial, que segundo Bianchini e Puga (2006) e Nasser (2009) apontam que os alunos chegam ao Ensino Superior sem os conhecimentos básicos das funções, temos a seguinte indagação: Se o ensino da função logarítmica for apresentado no Ensino Médio a partir da relação entre a área da curvatura de uma hipérbole definida por $y = \frac{1}{x}$ e com isto introduzir o logaritmo natural poderíamos diminuir as dificuldades dos alunos na aprendizagem desta função?

Desta forma, sugerimos pesquisas futuras sobre esta temática em investigar o ensino desta função no Ensino Médio.

Como reflexão da nossa prática, ao realizar esta pesquisa percebemos o quanto é trabalhoso elaborar uma sequência didática e planejar estratégias de ensino com objetivos previamente estabelecidos. Percebemos que o uso apenas de materiais pedagógicos e livros didáticos em que os exercícios estão prontos não é suficiente para contribuir para a aprendizagem. É necessário que o professor escolha situações-problema que contemplem situações que possibilitem aos alunos a oportunidade para investigar, elaborar e testar hipóteses, conjecturar e assim tornar possível a generalização e abstração de um conceito matemático.

Para tanto concluímos o quanto a formação continuada do professor é importante, pois contribui para o nosso crescimento profissional e consequentemente refletirá na aprendizagem dos nossos alunos.

Como pesquisadora esperamos que a leitura deste trabalho apresentado possa contribuir para novas pesquisas na Educação Matemática e para a reflexão da prática docente dos colegas professores de Matemática.

REFERÊNCIAS

ADDA, J. **Elementos de dicáctica de la matemáticas**. Curso impartido en la Sección de Matemática Educativa. Toma de notas y traducción de Guillermo Arreguin y Marta Olvera. México. 1987.

ARDENGHI, M. J. **Ensino e aprendizagem do conceito de função: Pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil**. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

ARTIGUE, M; DOUADY, R.; MORENO, L. **Ingeniería didáctica em Educación matemática: um esquema para la investigación y la innovación em la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas**. Bogotá: Pedro Gómez, 1995.

ÁVILA, G. S.S, **Várias faces da matemática**. São Paulo: Blucher, 2007.

BIANCHINI, B. L; PUGA, L. Z. Função: Diagnosticando Registros de Representação Semiótica In: **REFREMAT- Revista Eletrônica de Republicação em Educação Matemática**: UFSC, p. 5-16, 2006.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília, 1999.

_____, Ministério da Educação. **PCN+ Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília, 2002.

_____. Secretaria da Educação Básica. **Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Orientações Curriculares para o Ensino Médio**; volume 2. Brasília; MEC, 2006.

_____, Ministério da Educação. **PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação: SAEB: Ensino Médio: matrizes de referência, tópicos e descritores**. Brasília: MEC, SEB; Inep, 2008.

BROLEZZI, A. C; BARUFI, M.C.B. **História da Matemática e ensino de cálculo: reflexão sobre o pensamento reverso**. Guarapuava: SBHMat, 2007.

BROUSSEAU, G. **Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques**. In: Recherches de Didactique des Mathématiques, v. 7/2. Grenoble, 1986.

CHAVES, M. I. A. **Modelando Matematicamente questões ambientais relacionadas com a água a propósito do ensino-aprendizagem de funções na 1ª série do Ensino Médio**. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática), Universidade Federal do Pará, Belém.

COELHO, S.P.; MACHADO, S.D.A.; MARANHÃO, M.C.S.A. **Qual a álgebra a ser ensinada em cursos de Formação de professores de matemática?** Anais do II SIPEM. Santos, 2003.

COURANT, R. ROBBINS, H. **O que é matemática?** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

DANTE, L. R. **Matemática**, volume único 1. Edição São Paulo: Ática, 2005.

DOUADY, R. **Jeux des Cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques**. Thèse de Doctorat d'Etat (specialité didactique des mathématiques). Paris, Université Paris VII, p. 1-28, 1984.

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: Tall, David. **Advanced Mathematical Thinking**. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht – Holanda, 1991, p. 25-41.

DUVAL, R. Graphiques et équations: L'articulation de deux registres. In: **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**. IREM de Strasbourg vol. 1, p. 235-253, 1988.

_____. Registros de Representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S.D. A (org). **Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica**. Campinas, SP: Papirus, p. 11-33, 2003.

_____. **Semiósis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais** (Fascículo I)- Tradução: LEVY, L. F; SILVEIRA, M.R.A, 1ª edição – São Paulo: Livraria da Física, 2009.

ESPINOSA, F. H. Intuición Primera versus Pensamiento Analítico: Dificultades em el paso de una representación gráfica a un contexto real u viceversa. In: **Educación Matemática** vol. 7 nº 1: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**, tradução: Hygino H. Domingues. 3ª reimpressão. Campinas, SP: UNICAMP, 2008.

FERREIRA, R. L. **Uma sequência de ensino para o estudo de logaritmos usando a Engenharia Didática**. 2006. Dissertação (Mestrado para o Ensino de Física e Matemática)- Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, RS.

FIORENTINI, D; Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil. In: **Revista Zetetiké**, Campinas, SP, ano 3, n.4, p. 1-37, 1995.

FROTA, Maria. Clara. R., BORGES, Oto N. **Perfis de Entendimento sobre o Uso de Tecnologias na Educação Matemática**. In: Encontro da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, 27ª, Caxambu, MG, 2004. *Sociedade, Democracia e Educação*. Rio de Janeiro: ANPED, 2004. (CD-ROM em anexo, arquivo: ISBN: 85-8639-12-X, p.1-17).

KAPUT, J. J. Towards a theory of symbol use in mathematics. In C. Janvier (Ed), **Problem of representation in he teaching and learning of mathematics**. Hillsdale: L.E. A. p.159-195,1987.

KARRER, M. **Logaritmos: Proposta de uma sequência de ensino utilizando a calculadora**. 1999. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo- SP.

LIMA, P. O. **Uma trajetória Hipotética de Aprendizagem sobre funções logarítmicas**. 2009. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática In: **Educação Matemática uma Introdução**: S.D. A et al 2ª edição –São Paulo: EDUC, 2002 pp. 197-208.

MAOR, E. **e: A história de um número**. Tradução Jorge Calife. 4ª edição. Rio de Janeiro: Record, 2008.

NASSER, L. Uma Pesquisa sobre o desempenho de alunos de cálculo no traçado de gráfico In: **Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates**. Maria Clara Rezende Frota, Lilian Nasser, Recife: SBEM, 2009.

OLIVEIRA, G. P. **Avaliação em cursos Online Colaborativos: Uma abordagem multidimensional**. Tese (Doutorado) Universidade de São Paulo, SP, 2007.

_____, G. P. **Generalização de padrões, pensamento algébrico e notações: o papel das estratégias didáticas com interfaces computacionais**. In: Educação Matemática Pesquisa, v. 10, p. 295-312, 2008.

PONTE, J. P.; BROCARD, J; OLIVEIRA, H. Investigações Matemáticas na sala de aula. **Tendências em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

_____, J. P; CANAVARRO, P. **Matemática e novas tecnologias**. Lisboa: Universidade Aberta, 1997.

SALDANHA, M. S. G. **Análise de uma Intervenção Didática sobre Desigualdades e Inequações Logarítmicas no Ensino Médio**. 2007. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

SÃO PAULO (ESTADO). Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Caderno do Professor de Matemática**. 1º ano Ensino Médio vol. 3, 2009.

SIMON, M. A. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. **Journal for Research in Mathematics Education**, n.26 vol 2, p.. 114-145, 1995.

ANEXOS

Anexo I - Autorização para a realização da Pesquisa

Termo de autorização

Eu, _____ RG _____ autorizo a professora Adriana Tiago Castros dos Santos, a utilizar parcial ou integralmente, respostas a questionários ou gravações de meu (minha) filho (a) _____ para fins de pesquisa científica, podendo divulgá-las integral ou parcialmente em publicações, congressos e eventos da área com a condição de que o nome do meu (minha) filho (a) não será citado em hipótese alguma. Abdicando direitos meus e de meus descendentes, subscrevo o presente termo.

Itaquaquecetuba, maio de 2010

Assinatura do responsável legal

Anexo II - Autorização para a realização de Pesquisa Acadêmica

Termo de autorização

À

Excelentíssima Diretora da Escola Estadual Profª Vera Lúcia Leite da Costa

Venho por meio de este solicitar vossa autorização para que eu, Adriana Tiago Castro dos Santos, aluna regularmente matriculada no curso de Mestrado Acadêmico do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, possa desenvolver parte da minha pesquisa de Mestrado, junto aos alunos do Ensino Médio do período Noturno desta unidade Escolar.

A atividade consiste em encontros semanais fora do período vespertino, no laboratório do “acessa escola” com entrevistas e pesquisas direcionadas, com o objetivo de realizar uma sequência didática sobre o tema Funções Logarítmicas utilizando o *software* Geogebra.

Informo que estou providenciando junto aos responsáveis dos alunos para que estes participem dessa pesquisa.

Desde já, agradeço a vossa compreensão e me disponho para quaisquer esclarecimentos caso seja necessário.

Itaquaquecetuba, maio de 2010

Atenciosamente

Adriana Tiago Castro dos Santos